Mines Maths 1 MP 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Gilbert Monna (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Jérôme Gärtner (ENS Cachan) et Laetitia Borel-Mathurin (ENS Cachan).

Le problème tire son origine de la théorie des probabilités : étant donné une variable aléatoire de densité f, on se demande si les moments de la densité de probabilité déterminent la loi de probabilité ou, de façon équivalente, la densité f. Un contre-exemple dû à Stiljes, étudié dans la partie C, montre que la réponse est en général négative. On établit ensuite une condition suffisante pour que les moments de f déterminent la loi de probabilité.

- La première question est un peu musclée mais s'inscrit dans un contexte très simple. La suite du problème fait appel à une formule de Taylor, puis à de l'analyse élémentaire avec des questions techniques destinées à être utilisées dans la suite, quelquefois d'une simplicité un peu déconcertante.
- La partie B contient la seule question vraiment difficile du problème ; c'est une application très intéressante du théorème de Fubini, malheureusement compliquée par un contexte technique et calculatoire.
- La partie C porte sur les intégrales généralisées ; elle permet de s'entraîner à leur manipulation, mais ne pose pas de difficultés.
- La partie D est encore un peu technique, avec le seul passage algébrique du problème puisqu'on est confronté à une inégalité de Cauchy-Schwarz.
- La partie E, cerise sur le gâteau, donne une application judicieuse de l'une des intégrales dépendant d'un paramètre étudiées.

En résumé, il s'agit d'un problème intéressant et abordable avec un énoncé très bien rédigé. Utilisant les grands outils du cours d'analyse, il est vivement conseillé de le traiter à mi-parcours, c'est-à-dire après les séries de fonctions, afin d'assurer un peu plus les bases avant de se lancer dans les séries entières et les séries de Fourier.

Indications

1 Utiliser la formule de Leibnitz pour la dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre sans oublier d'hypothèses.

2 Penser à la formule de Taylor-Lagrange.

3 Vérifier que $h_{a,b}$ satisfait la condition de continuité d'un prolongement en 0 d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^*$.

4 Il n'y a pas d'égalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, mais il existe cependant une inégalité.

5 Commencer par écrire le développement en série entière de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ en $x = k$.

6 Chercher un changement de variable adéquat.

7 Utiliser la relation trouvée à la question précédente.

8 Commencer par expliciter le terme de gauche, puis inverser les intégrales (en justifiant) pour enfin revenir à la forme trigonométrique de e^{ix}.

9 Expliciter le résultat de la question précédente puis chercher une propriété de l'intégrale d'une fonction continue positive qui pourrait être utile.

10 et 11 Pour la convergence des intégrales, utiliser les croissances comparées et pour les calculs le changement de variable $u = \ln x$.

12 Remarquer que f_a est le produit de f_0 par une fonction bornée.

13 Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

14 Commencer par supposer k pair. Pour k impair, il faut utiliser la question précédente et ne pas se laisser décourager par les calculs.

15 Utiliser la formule de Taylor-Lagrange.

16 Utiliser la question 5 pour majorer $\dfrac{|h|^n}{n!}\, b_n(f)$ par le terme général d'une série géométrique.

17 Faire une récurrence sur ℓ en appliquant le résultat de la question précédente en $\ell\mathrm{A}/2$.

19 Calculer explicitement les a_{2k} puis écrire ϕ_f sous forme d'une série entière dont on peut déterminer l'expression. Chercher, dans le préambule de l'énoncé, une fonction g telle que $\phi_g = \phi_f$.

Les conseils du jury

Il faut être très soigneux dans la rédaction d'une question dont la réponse est donnée : citez très précisément les théorèmes utilisés, ainsi que les résultats antérieurs (avec les numéros des questions correspondantes), évitez « de court-circuiter la moindre étape ».

Le jury conseille également aux candidats qui ne savent pas traiter une question et qui en admettent le résultat pour continuer de le dire clairement : « tout acte d'honnêteté est très apprécié ; en revanche, toute tentative de dissimulation ou de tricherie indispose les correcteurs et peut être très pénalisante. »

A. Questions préliminaires

1 Soit $t \in \mathbb{R}$. Puisque f est à valeurs positives,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|\mathrm{e}^{\,itx} f(x)\right| = |f(x)| = f(x)$$

On a de plus
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

ce qui entraîne que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left|\mathrm{e}^{\,itx} f(x)\right|\,\mathrm{d}x$ est une intégrale convergente, donc la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\,itx} f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En résumé,

$$\boxed{\phi_f \text{ est défini sur } \mathbb{R}.}$$

La dérivée partielle d'ordre k par rapport à t de la fonction $(t,x) \mapsto \mathrm{e}^{\,itx} f(x)$ est $(t,x) \mapsto (\mathrm{i}x)^k\,\mathrm{e}^{\,itx} f(x)$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De plus,

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad \left|(\mathrm{i}x)^k\,\mathrm{e}^{\,itx} f(x)\right| = |x|^k f(x)$$

La fonction f admet des moments de tous ordres, ce qui signifie que la fonction $x \mapsto |x|^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout entier naturel k. D'après le théorème de Leibnitz de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre, la fonction ϕ_f est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad (\phi_f)^{(k)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{i}x)^k\,\mathrm{e}^{\,itx} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

> Quand on applique un théorème, il faut penser à vérifier toutes les hypothèses soigneusement. Pour cette question, le rapport du jury mentionne : « Les conditions de validité du théorème de convergence dominée ne sont pas souvent vérifiées avec la précision et la rigueur requises. »

2 Désignons par f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x}$. On a

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(k)}(x) = \mathrm{i}^k\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x}$$

donc
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|f^{(k)}(x)\right| = 1$$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Appliquons à f l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 :

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k\right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!} \operatorname*{Sup}_{t \in [\,0\,;x\,]} \left|f^{(n)}(t)\right|$$

ce qui donne
$$\boxed{\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}}$$

> Les trois formules de Taylor au programme sont distinguées par leur reste. Le rapport du jury signale des confusions entre le reste de Young et le reste de Lagrange.

3 Soient $(a, b, t) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tb} = 1 - \mathrm{i}ta + \mathrm{o}(\mathrm{i}t) - (1 - \mathrm{i}tb + \mathrm{o}(\mathrm{i}t)) = \mathrm{i}t\,[(b-a) + \mathrm{o}(1)]$$

On en déduit que
$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tb}}{\mathrm{i}t} = b - a$$

La fonction $h_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ par les théorèmes généraux et, d'après ce qui précède, la limite quand t tend vers 0 de $h_{a,b}(t)$ est égale à $h_{a,b}(0)$. De ce fait, $h_{a,b}$ est continue en 0. Au final,

$$\boxed{\text{La fonction } h_{a,b} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

4 Soit t un réel. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}$, on obtient

$$|f(a) - f(b)| \leqslant (b-a) \operatorname*{Sup}_{x \in [\,a\,;b\,]} |f'(x)|$$

Il suffit alors de remarquer que $|f'(x)| = |t|$ pour tout réel x pour obtenir

$$|f(a) - f(b)| \leqslant (b-a)\,|t|$$

Ainsi,
$$\forall t \in \mathbb{R}^* \qquad |h_{a,b}(t)| \leqslant b - a$$

Comme l'inégalité demandée est clairement vérifiée pour $t = 0$ puisque $h_{a,b}(0) = 0$, on a bien

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad |h_{a,b}(t)| \leqslant b - a}$$

Rappelons, comme le fait le rapport du jury, que pour les fonctions à valeurs complexes (comme pour les fonctions à valeurs vectorielles) on a une inégalité des accroissements finis, mais l'égalité n'est plus vraie.

5 Par définition, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\quad \mathrm{e}^{k} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n}{n!}$

Comme une somme de nombres positifs est supérieure ou égale à chacun de ses termes, en prenant le terme d'indice $n = k$, on obtient bien

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{e}^{k} \geqslant \frac{k^k}{k!}}$$