CCP Maths 2 MP 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Dujardin (Chercheur INRIA) ; il a été relu par Gilbert Monna (Professeur en CPGE) et Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE).

Cette épreuve se compose de 2 exercices et d'un problème, tous indépendants.

- Le premier exercice, court, aborde la réduction des endomorphismes en dimension finie avec la notion de polynôme annulateur et son lien avec le spectre de l'endomorphisme.
- Le second exercice utilise la géométrie euclidienne en dimension 3 ; on calcule la matrice d'une symétrie orthogonale dans deux bases différentes.
- Le problème introduit la notion de résultant d'un couple de polynômes à coefficients complexes. On y montre notamment que le résultant est nul si et seulement si les polynômes ne sont pas premiers entre eux. Ce résultat est appliqué à la description des polynômes satisfaisant une relation de Bézout pour deux polynômes premiers entre eux donnés. On constate également sur un exemple comment ce résultat permet de passer d'un paramétrage d'une parabole du plan à une équation cartésienne de cette parabole. Enfin, il permet de construire explicitement un polynôme à coefficients entiers, de degré 4, admettant $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ pour racine.

Ce sujet est d'une longueur raisonnable pour une épreuve de quatre heures. Les exercices sont des applications assez directes du cours, qui permettent de travailler une partie spécifique du programme sans avoir à faire face à trop de difficultés techniques. Le problème, lui, est à la fois intéressant et utile puisqu'il permet de réviser les théorèmes de Gauss et de Bézout, puis de découvrir la notion de résultant et quelques-unes de ses applications sur des exemples.

Indications

Premier exercice

1 Montrer tout d'abord par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u^n(x) = \lambda^n x$$

si x est un vecteur propre de u pour la valeur propre λ.

2.a Montrer que, si x est un vecteur propre de u pour la valeur propre λ, alors

$$\mathrm{P}(u)(x) = \mathrm{P}(\lambda)x$$

3 Remarquer que $u^3 - u^2 + u - 1 = (u-1)(u^2+1)$.

Deuxième exercice

1 Observer que ω est orthogonal au plan Π.

3 Utiliser la question précédente et la formule de changement de base pour la matrice d'un endomorphisme.

Problème

1.b Montrer la contraposée.

1.c Penser au théorème de Gauss.

2.b Utiliser le résultat de la question 1.

3.a Raisonner par double implication.

3.b Utiliser une calculatrice pour déterminer $\mathrm{M}_{\mathrm{P},\mathrm{P}'}$.

4.a Calculer $\mathrm{M}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}$ à l'aide d'une calculatrice et utiliser la question 2.b.

4.b Se ramener à la résolution d'un système linéaire et utiliser une calculatrice.

4.c Penser au théorème de Gauss.

5.b Utiliser le résultat de la question 2.b.

6 Montrer que le résultant de P et Q_y, vu comme une fonction de y, répond à la question.

Premier exercice

1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de u. Il existe $x \in \mathrm{E}$ non nul tel que

$$u(x) = \lambda\, x$$

Par récurrence, il vient $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u^n(x) = \lambda^n x$

Cette égalité est encore vraie pour $n = 0$. Par combinaisons linéaires, on en déduit que, lorsque $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k$ est un polynôme à coefficients réels,

$$\mathrm{P}(u)(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k x = \mathrm{P}(\lambda)x$$

Puisque $x \neq 0$,

$$\boxed{\mathrm{P}(\lambda) \text{ est une valeur propre de l'endomorphisme } \mathrm{P}(u).}$$

Remarquons que tout vecteur propre de u pour la valeur propre λ est un vecteur propre de $\mathrm{P}(u)$ pour la valeur propre $\mathrm{P}(\lambda)$.

Le rapport du jury note pêle-mêle pour cette question que :

- il est important de préciser qu'un vecteur propre est non nul ;
- on rencontre trop souvent $\mathrm{P}(u(x))$ ou $\mathrm{P}(x)$, ce qui n'a pas de sens pour P polynôme et x vecteur.

2.a Considérons une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ de l'endomorphisme u. Alors il existe $x \in \mathrm{E}$ non nul tel que

$$u(x) = \lambda\, x$$

À la question précédente, on a vu que dans ce cas

$$\mathrm{P}(u)(x) = \mathrm{P}(\lambda)x$$

Puisque $\mathrm{P}(u)$ est l'endomorphisme nul par hypothèse, $\mathrm{P}(u) = 0$. Par conséquent, $\mathrm{P}(u)(x) = 0$, donc $\mathrm{P}(\lambda)x = 0$. Puisqu'en outre $x \neq 0$, il vient que

$$\mathrm{P}(\lambda) = 0$$

Par suite, $\qquad \boxed{\text{Toute valeur propre de } u \text{ est racine de } \mathrm{P}.}$

2.b Considérons l'endomorphisme nul de E,

$$u \colon \begin{cases} \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E} \\ x \longmapsto 0_{\mathrm{E}} \end{cases}$$

et le polynôme $\qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)$

La relation $\mathrm{P}(u) = 0$ est bien satisfaite. On vérifie facilement que le spectre de u est $\{0\}$ alors que les racines de P sont 0 et -1. Par suite,

$$\boxed{\text{Une racine de P n'est pas nécessairement une valeur propre de } u.}$$

Plus généralement, lorsque l'on multiplie un polynôme annulateur d'un endomorphisme par n'importe quel polynôme, on obtient encore un polynôme annulateur. Ainsi, on peut ajouter un nombre arbitraire (fini !) de racines à un polynôme annulateur, quitte à le multiplier par des polynômes de la forme $X - \lambda$.

L'ensemble des racines d'un polynôme annulateur peut donc être aussi grand qu'on le souhaite. En revanche, il ne peut pas être trop petit : en effet, comme on l'a montré à la question 2.a, parmi les racines d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme figurent nécessairement les valeurs propres de ce dernier.

Malgré les remarques précédentes, le rapport du jury note que « pour certains, il y a égalité entre spectre et ensemble des racines d'un polynôme annulateur. » Espérons que les lecteurs avertis de ce corrigé ne commettront pas cette erreur.

3 Remarquons que 1 est racine de P, ce qui permet la factorisation

$$P = X^3 - X^2 + X - 1 = (X - 1)(X^2 + 1)$$

Ce polynôme annule u par hypothèse. Par conséquent, le résultat de la question 2.a assure que

$$\text{sp}\,(u) \subset \{1\}$$

Puisque E est de dimension finie et impaire, le polynôme caractéristique χ_u de u est de degré impair. Comme E est un espace vectoriel réel, χ_u est à coefficients réels. Enfin, le fait que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \chi_u(\lambda) = \det\,(u - \lambda\,\text{id}\,)$$

assure que le coefficient dominant de χ_u est $(-1)^{\dim E} = -1$. Par conséquent,

$$\lim_{X \to -\infty} \chi_u(X) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{X \to +\infty} \chi_u(X) = -\infty$$

Bien entendu, si on adopte l'autre définition du polynôme caractéristique,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \chi_u(\lambda) = \det\,(\lambda\,\text{id}\, - u)$$

alors le coefficient dominant de χ_u est 1 et l'on a

$$\lim_{X \to -\infty} \chi_u(X) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{X \to +\infty} \chi_u(X) = +\infty$$

Puisque χ_u est une application polynomiale, elle est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à χ_u assure que χ_u s'annule sur $\mathbb{R}$, donc u admet au moins une valeur propre réelle. Par suite,

$$\text{sp}\,(u) \neq \varnothing$$

On en déduit que $\boxed{\text{sp}\,(u) = \{1\}}$