CCP Maths 1 MP 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tristan Poullaouec (Professeur agrégé) ; il a été relu par Benoît Landelle (Professeur en CPGE) et Paul Pichaureau (Professeur en CPGE).

Ce sujet est constitué de deux exercices et d'un problème indépendants.

- Dans le premier exercice, on résout l'équation différentielle suivante :

$$x\,y' + y = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

  On montre en particulier qu'elle admet une unique solution maximale. Cet exercice pourrait être posé lors d'une interrogation orale en début de première année. Étonnamment, le rapport du jury signale que le premier exercice est « celui qui a été le moins abordé ».
- Le second exercice propose de calculer la valeur de l'intégrale de Gauss

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

  en utilisant des intégrales à paramètres. Il fait intervenir des intégrales sur un segment de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, ce qui donne l'occasion d'appliquer, entre autres, le théorème de dérivation sous le signe somme.
- Le problème est consacré au théorème de Picard dans un espace de Banach $(\mathrm{E}, \|\ \|)$: si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ est une application strictement contractante (c'est-à-dire k-lipschitzienne pour un certain $k < 1$), alors elle admet un unique point fixe.
  - La première partie démontre le théorème.
  - La deuxième examine des exemples et contre-exemples.
  - Les deux dernières parties montrent des applications de ce théorème, l'une en analyse et l'autre en géométrie.

  Les parties comportent plusieurs questions de cours. Les autres questions sont très détaillées et ne présentent aucun piège : il suffit de se laisser guider par l'énoncé.

Un candidat correctement préparé n'aura guère de mal à traiter intégralement ce sujet plutôt facile dans le temps imparti. Il fallait donc le jour de l'épreuve commencer par feuilleter l'énoncé dans son intégralité, pour le classer parmi les sujets « faciles », être rapide et rédiger soigneusement.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Indications

Exercice 1

2 Soit f une telle solution de (E) ; calculer $f(0)$ puis, à l'aide de la question 1, déterminer les expressions de f sur $]-1\,;0\,[$ et sur $]\,0\,;1\,[$ nécessaires à la continuité. Vérifier ensuite que la fonction obtenue est bien continue et dérivable en 0.

Exercice 2

1 Au voisinage de l'infini, dominer la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2.a Ne pas oublier l'hypothèse de domination pour la dérivation sous le signe intégral. Le rapport du jury insiste lourdement sur ce point.

2.b Effectuer un changement de variable pour obtenir la nouvelle expression de f. Ensuite, calculer φ'.

2.d Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, puis utiliser les résultats des questions 2.b et 2.c.

Problème

1.b Calculer les sommes partielles de la série $\sum u_n$.

1.c Ne pas oublier d'établir la continuité de f.

1.d Considérer deux points fixes et utiliser la propriété de contraction stricte.

3.c Combiner les résultats des questions 3.a et 3.b.

4.b Penser aux accroissements finis.

4.c Utiliser la question 4.b.

4.d Exploiter les résultats des questions 4.a et 4.c.

5.a Se servir de la définition de la borne supérieure pour vérifier proprement l'homogénéité et la sous-additivité de $\|\ \|_\infty$.

5.c Soit $x_0 \in \mathrm{G}$. Pour tous $x \in \mathrm{G}$ et $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$g(x) - g(x_0) = g(x) - g_n(x) + g_n(x) - g_n(x_0) + g_n(x_0) - g(x_0)$$

Utiliser ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g_n - g\|_\infty = 0$ ainsi que la continuité des applications g_n.

5.d Mettre à profit les questions 5.b et 5.c.

6.c Vérifier que l'on se trouve dans le cadre d'application du théorème de Picard.

7.a Appliquer le théorème de Thalès aux triangles rectangles $\mathrm{P_M CM}$ et $\mathrm{P_{M'} CM'}$.

7.b Utiliser de façon répétée le résultat de la question précédente.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Exercice 1

1 Commençons par résoudre l'équation (E) sur $]\,0\,;1\,[$.

- L'équation homogène associée est $xy' + y = 0$, ce qui équivaut à $y' + y/x = 0$. On sait que l'ensemble de ses solutions sur $]\,0\,;1\,[$ est la droite vectorielle engendrée par la fonction
$$h : x \longmapsto \exp\left(-\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}\right) = \exp\left(-\ln x\right) = \frac{1}{x}$$
- Utilisons la méthode de variation de la constante et cherchons une solution particulière de l'équation différentielle (E) sous la forme $y : x \longmapsto \lambda(x)/x$, où λ est une fonction dérivable sur $]\,0\,;1\,[$. Pour tout $x \in\,]\,0\,;1\,[$, on a alors
$$xy'(x) + y(x) = x\left(\frac{\lambda'(x)}{x} - \frac{\lambda(x)}{x^2}\right) + \frac{\lambda(x)}{x} = \lambda'(x)$$
d'où $$\lambda'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} = 2x \times \mathrm{Arcsin}\,'(x^2) \qquad \text{d'après (E)}$$
Ainsi, la fonction $\lambda : x \longmapsto \mathrm{Arcsin}\,(x^2)$ convient. En conséquence, l'équation (E) admet pour solution particulière la fonction $y_0 : x \longmapsto \mathrm{Arcsin}\,(x^2)/x$.
- On en déduit par superposition des solutions que

> Les solutions sur l'intervalle $]\,0\,;1\,[$ de l'équation (E) sont toutes les fonctions $f_\lambda : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{Arcsin}\,(x^2) + \lambda}{x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Les calculs sont similaires sur l'intervalle $]-1\,;0\,[$: l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E) est encore engendré par la fonction inverse, la fonction $y_1 : x \longmapsto \mathrm{Arcsin}\,(x^2)/x$ est aussi une solution de (E), si bien que

> Les solutions sur l'intervalle $]-1\,;0\,[$ de l'équation (E) sont toutes les fonctions $g_\mu : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{Arcsin}\,(x^2) + \mu}{x}$, avec $\mu \in \mathbb{R}$.

2 Cherchons maintenant les solutions de (E) sur $]-1\,;1\,[$, c'est-à-dire les fonctions continues et dérivables sur l'intervalle $]-1\,;1\,[$ qui vérifient l'équation (E) sur celui-ci.

- Soit f une telle fonction.
  - Elle est solution de (E) donc en 0,
  $$0 \times f'(0) + f(0) = \frac{2 \times 0}{1 - 0^4} = 0$$
  soit $f(0) = 0$.
  - La fonction f est aussi solution de (E) sur $]-1\,;0\,[$ donc
  $$\exists\, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in\,]-1\,;0\,[\qquad f(x) = \frac{\mathrm{Arcsin}\,(x^2) + \mu}{x}$$
  d'où $$\forall\, x \in\,]-1\,;0\,[\qquad \mu = xf(x) - \mathrm{Arcsin}\,(x^2)$$
  Comme f est continue sur $]-1\,;1\,[$, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. De plus, on sait que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{y\to 0} \mathrm{Arcsin}\,(y) = 0$. On en déduit par composition, somme et produit de limites que
  $$\mu = \lim_{x\to 0^-} xf(x) - \mathrm{Arcsin}\,(x^2) = 0$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

– Enfin, f est solution de (E) sur $]\,0\,;1\,[$ donc

$$\exists\,\lambda \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in \,]\,0\,;1\,[\qquad f(x) = \frac{\text{Arcsin}\,(x^2) + \lambda}{x}$$

d'où $\qquad \forall\, x \in \,]\,0\,;1\,[\qquad \lambda = x f(x) - \text{Arcsin}\,(x^2)$

et comme précédemment, on en déduit que

$$\lambda = \lim_{x\to 0^+} x f(x) - \text{Arcsin}\,(x^2) = 0$$

Ainsi, si f est une solution de (E) sur $]\,-1\,;1\,[$, c'est nécessairement la fonction

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\text{Arcsin}\,(x^2)}{x} & \text{si } x \in \,]\,-1\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;1\,[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Réciproquement, considérons la fonction f déterminée ci-dessus.
  - Elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,-1\,;0\,[$ et sur $]\,0\,;1\,[$ en tant que composée de fonctions usuelles $\mathscr{C}^1$ sur les intervalles considérés.
  - On sait que $\text{Arcsin}\, y \underset{y\to 0}{\sim} y$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, d'où $\text{Arcsin}\,(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ soit

$$f(x) = \frac{\text{Arcsin}\,(x^2)}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} x$$

Ainsi $$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

et donc f est continue en 0.

  - En outre, on a pour tout $x \in \,]\,-1\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;1\,[$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

et donc $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

ce qui montre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.

Par conséquent, la fonction est continue et dérivable sur l'intervalle $]\,-1\,;1\,[$.

On pouvait aussi, à partir de

$$\text{Arcsin}\,(y) = y + \underset{y\to 0}{\text{o}}(y) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

établir sur $]\,-1\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;1\,[$ le développement limité

$$f(x) = \frac{\text{Arcsin}\,(x^2)}{x} = x + \underset{x\to 0}{\text{o}}(x)$$

Ce développement limité à l'ordre 1 en 0 est valable sur $]\,-1\,;1\,[$ puisque $f(0) = 0$. De ce fait, f est continue et dérivable en 0, et $f'(0) = 1$.

Quoiqu'il en soit, il ne faut surtout pas oublier de montrer que la fonction f est non seulement continue, mais aussi dérivable en 0 : le rapport du jury signale à cet effet que « les rares candidats ayant attaqué le recollement des solutions ont manqué de rigueur dans la rédaction et se sont contentés d'un recollement par continuité ».