ENAC Maths toutes filières 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Céline Chevalier (ENS Cachan) ; il a été relu par Sophie Rainero (Professeur en CPGE) et Laetitia Borel-Mathurin (ENS Cachan).

Le concours de l'ENAC a pour habitude d'aborder la majorité des chapitres au programme en PCSI. Cette diversité permet de ne désavantager personne étant donné que le concours a lieu très tôt dans l'année, à une époque où tout le programme n'a pas encore été traité en cours. 36 questions à choix multiples sont ainsi proposées, et il est demandé d'en traiter au maximum 24.

Le sujet est calculatoire, chaque question est longue et souvent ambiguë, et le temps imparti est court : il semble difficile de traiter 24 questions dans ces conditions. On peut cependant noter que la tâche a été facilitée cette année car l'énoncé ne comporte que deux questions liées. On peut ainsi sauter des questions sans perdre le fil – et sans risquer d'agacer le correcteur puisque la correction s'effectue par lecture optique. Le sujet ne comporte pas officiellement plusieurs parties, mais on peut le découper de la façon suivante :

- La première partie regroupe les questions 1 à 5 : elle traite de complexes, trigonométrie et géométrie et demande de l'aisance dans les calculs.
- La deuxième partie s'étend de la question 6 à la question 19 : il s'agit essentiellement d'intégration, de suites et d'équations différentielles. Les résultats et techniques sont classiques, mais non dépourvus de difficulté.
- La troisième partie, de la question 20 à la question 26, traite d'algèbre avec un peu d'arithmétique et de dénombrement, et surtout des polynômes, en particulier ceux de Tchebychev.
- Enfin, la quatrième partie (questions 27 à 36) a pour objet l'algèbre linéaire, avec un zeste de géométrie. C'est sans doute la partie la plus facile du sujet.

L'ENAC est un concours qui nécessite du soin, de la concentration, ainsi qu'une grande aisance dans les calculs et une certaine dose de méfiance : il convient de s'y entraîner spécifiquement. Il est toujours indispensable de s'attacher à la formulation précise des propositions : examinez toutes les réponses possibles avant de vous décider, et n'hésitez pas à sauter les questions où les interprétations possibles seraient trop nombreuses.

Cette ambiguïté est encore plus présente cette année avec le changement considérable de la présentation de l'énoncé. Très désagréable à lire, il est rempli de notations malheureuses (IR pour $\mathbb{R}$, à ne pas confondre avec $\mathrm{i}\mathbb{R}$), de fautes de frappes, d'erreurs, d'indications partielles et de confusions possibles. Rares sont les questions où l'on peut être absolument certain de sa réponse. C'est peut-être un choix délibéré du concours puisqu'un pilote (ce que pourront devenir les candidats sélectionnés) doit être capable de prendre la bonne décision au bon moment en dépit d'informations incomplètes et pas toujours fiables.

Un énoncé de l'ENAC constitue toujours un bon sujet de révision et un test de son aptitude à mener des calculs. Celui de cette année a aussi pour mérite de vous permettre d'apprendre à réagir devant les erreurs d'énoncé, qui peuvent apparaître dans chacun des concours que vous serez amené à passer.

Indications

1 Utiliser les formules de Moivre et le binôme de Newton. Exploiter ensuite la relation obtenue pour déterminer la valeur de $\cos(\pi/10)$.

2 Le rapport d'une similitude envoyant le point $\mathrm{M}(z)$ sur $\mathrm{M}'(z')$ est $|z'/z|$ et son angle $\arg(z'/z)$.

3 Pour B et C, étudier le cas $\theta \in \pi\mathbb{Z}$.

4 Considérer les antécédents de 1.

5 Appeler M le point d'affixe z, N le point d'affixe z^2 et P le point d'affixe z^5. Traduire l'alignement par l'existence d'un réel λ tel que $\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{MN}}$. Considérer des cas particuliers pour B et C. Pour D, poser $z = x + iy$ et écrire l'équation réduite de l'hyperbole.

6 Exprimer u_{n+1}/u_n et v_{n+1}/v_n.

7 Calculer les dérivées première et seconde de f.

9 Ne pas se laisser perturber par le double usage de la lettre y. Raisonner avec des ε pour B et utiliser la relation de Chasles pour C. Appliquer le résultat obtenu à la fonction Arctan.

10 Exploiter la formule de Taylor avec reste intégral.

11 Utiliser la définition de l'équivalence.

12 Calculer des équivalents et des développements limités.

13 Considérer le taux d'accroissement de f en 0.

14 Utiliser des développements limités connus.

15 Penser aux sommes de Riemann.

16 La question A est hors programme. Ensuite, découper l'intervalle de sommation en l'union des $[\,k\,;k+1\,[$ pour $k \in \mathbb{N}$ et appliquer la relation de Chasles.

17 Calculer les dérivées à l'aide de la formule de composition. Pour C, résoudre l'équation différentielle à l'aide du polynôme caractéristique associé.

18 La formule indispensable est la suivante :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

19 Effectuer le changement de variables en coordonnées polaires.

20 Pour A, considérer $n = 1$ et pour C et D, regarder le cas particulier où $x = 3$.

21 Commencer par fixer le nombre d'éléments de X, puis, une fois X déterminé, regarder les éléments que peut contenir Y.

22 Pour les trois premières propositions, exhiber un contre-exemple aux propriétés d'un groupe.

23 Considérer une racine a de P, et exploiter la relation vérifiée par le polynôme.

24 Chercher la racine sous la forme p/q avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, multiplier l'égalité par q^n et utiliser le théorème de Gauss.

25 Pour A, C et D, trouver des contradictions pour des valeurs particulières.

26 Une racine multiple d'un polynôme P est aussi racine de P′. Pour la question B, raisonner en termes d'équation différentielle.

27 Pour la première question, penser à l'orthogonalité de la famille pour un certain produit scalaire. Montrer ensuite que l'espace engendré par les vecteurs de la première question est inclus dans celui de la deuxième question. Pour C et D, utiliser la définition des familles libres.

28 Commencer par A, puis résoudre la question D avant les propositions B et C. Penser à l'exprimer de façon symétrique, en prenant pour hypothèse $G \subset F$.

29 Utiliser la définition d'une famille libre avec les λ_i.

30 La somme directe permet de décomposer les vecteurs de l'espace.

31 Pour A et B, repérer des contre-exemples faciles. Considérer ensuite la matrice représentative de la fonction dans la base proposée.

32 Pour C et D, considérer le cas $p = 1$.

33 Regarder les tailles des matrices proposées.

34 L'indication donnée par l'énoncé ne sert pas (elle est même fausse !). Considérer les fonctions constantes égales à 0 ou à 1.

35 Regarder si $\|f(u)\| = \|u\|$. Séparer ensuite $x \in \text{Vect}\,(u)$ et $x \in u^{\perp}$.

36 Passer par la partie linéaire pour déterminer l'expression de la symétrie.

> Attention au piège caché dans les choix typographiques douteux de l'énoncé : par « IR », les auteurs sous-entendent bien « $\mathbb{R}$ » et non « $\mathrm{i}\mathbb{R}$ »...

1 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant successivement les formules de Moivre puis le binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}\cos(5\theta) &= \mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}5\theta}) = \mathrm{Re}\,\left((\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta})^5\right)\\ &= \mathrm{Re}\,\left((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^5\right)\\ \cos(5\theta) &= \mathrm{Re}\,\left(\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(\cos\theta)^{5-k}\,\mathrm{i}^k(\sin\theta)^k\right)\end{aligned}$$

La partie réelle de cette expression est constituée de tous les termes où la puissance k de i est paire, c'est-à-dire $k = 0, 2, 4$:

$$\begin{aligned}\cos(5\theta) &= \binom{5}{0}(\cos\theta)^5 + \binom{5}{2}(\cos\theta)^3(-1)(\sin\theta)^2 + \binom{5}{4}\cos\theta(\sin\theta)^4\\ &= (\cos\theta)^5 - 10(\cos\theta)^3(1-(\cos\theta)^2) + 5\cos\theta(1-(\cos\theta)^2)^2\\ &= 11(\cos\theta)^5 - 10(\cos\theta)^3 + 5\cos\theta(1+(\cos\theta)^4 - 2(\cos\theta)^2)\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(5\theta) = 16(\cos\theta)^5 - 20(\cos\theta)^3 + 5\cos\theta}$$

La réponse B est donc exacte et la A est fausse.

En appliquant ce résultat à $\theta = \pi/10$, on remarque que $\cos(5\theta) = \cos(\pi/2) = 0$ et on obtient que $\cos(\pi/10)$ est solution de l'équation suivante :

$$16\mathrm{X}^5 - 20\mathrm{X}^3 + 5\mathrm{X} = 0$$

En constatant que $\cos(\pi/10) \neq 0$ et en posant $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$, on en déduit que $(\cos(\pi/10))^2$ est solution de l'équation suivante :

$$16\mathrm{Y}^2 - 20\mathrm{Y} + 5 = 0$$

Cette équation a pour discriminant $\Delta = 20^2 - 4\times 16\times 5 = 80 = (4\sqrt{5})^2$. Ses solutions sont alors

$$y_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \qquad \text{et} \qquad y_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

puis que $\quad \cos(\pi/10) \in \left\{\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}, -\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}, -\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}\right\}$

étant donné que les deux solutions y_1 et y_2 sont positives. On conclut en se rappelant que $0 \leqslant \pi/10 \leqslant \pi/3$, $\cos(\pi/3) = 1/2$, et que cos est décroissante sur $[\,0\,;\pi/2\,]$: $1/2 \leqslant \cos(\pi/10) \leqslant 1$. Cela exclut les deux valeurs négatives ainsi que la deuxième car $(5-\sqrt{5})/8 \leqslant (5-2)/8 < 1/2$. Ainsi,

$$\boxed{\cos(\pi/10) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}$$

La réponse C est exacte et la réponse D est fausse.

A B C D E