

## X/ENS Modélisation PSI 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean-Julien Fleck (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Benoît Lobry (Professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

---

Fidèle à la tradition de cette épreuve alternant sujet de physique appliquée les années impaires et problème de mathématiques les années paires, la cuvée 2008 est en première approximation plutôt orientée mathématiques. Néanmoins, on remarque un effort évident pour illustrer les méthodes mathématiques cachées derrière les programmes de résolution numérique, via la propagation des ondes de chocs dans la structure de la fusée Ariane 5 lors de la séparation de l'étage primaire, de propulsion, et de l'étage secondaire. Après une unique question effectivement posée sur Ariane 5, le problème s'articule en trois parties quasi indépendantes :

- La première partie pose le problème en se basant sur des mesures expérimentales faites pour un système simplifié de plaque vibrante. On remarque la présence de deux types d'ondes (transverses et longitudinales) dont l'étude constitue le corps des deux parties suivantes. Toutes les observations qui y sont faites trouvent une interprétation théorique par la suite. Pour cette raison, il peut être intéressant de revenir à ces questions une fois le reste du problème traité.
- La deuxième partie se focalise sur les ondes transverses. Par l'étude du tenseur des contraintes dans la plaque, on détermine une équation d'évolution que l'on cherche à résoudre par une méthode numérique basée sur un développement de Fourier. Le cheminement menant à l'équation d'évolution est similaire à celui mis en œuvre dans l'épreuve de 2006, qui portait sur les modes de vibration d'une poutre. L'équilibre entre la physique et les mathématiques est assez bon, bien que la question 15 amène des calculs fastidieux sans intérêt pour la suite.
- La troisième et dernière partie s'attarde quant à elle aux modes membranaires de propagation en se contentant d'illustrer la méthode mathématique permettant de résoudre numériquement des équations d'évolution, sans du tout chercher à savoir comment les obtenir. Néanmoins, si certains calculs peuvent paraître un peu lourds au niveau des notations (bien qu'ils restent à des niveaux élémentaires sur les intégrations par partie ou la représentation matricielle), cette partie parvient à donner une idée relativement simple de la résolution numérique par méthode de maillage et s'achève sur une série de questions très faciles à traiter.

Cette année encore, cette épreuve de modélisation a su mettre en exergue sa spécificité qui nécessite un entraînement ciblé. Elle commence par une série d'observations physiques, qui demandent d'expliquer « avec les mains », puis continue en étudiant le plus simple des modèles non triviaux du phénomène étudié. Ce modèle conduit généralement à un système d'équations que l'on doit résoudre numériquement et on étudie la théorie mathématique sur laquelle est basée la méthode de résolution. L'ensemble constitue un tout cohérent et représentatif de ce que l'on attend du cheminement intellectuel d'un ingénieur ou d'un chercheur.

## INDICATIONS

- 1 Que se passerait-il si un cordon ne s'allumait pas ?

### Première partie

- 4 Un milieu est dit dispersif si toutes les fréquences ne se propagent pas à la même célérité.  
5 Penser au sillage d'un bateau ou d'un avion en vol supersonique.

### Deuxième partie

- 7 Faire un dessin du comportement d'une section de la plaque selon  $\hat{y}$ .  
9 Le théorème du moment cinétique s'applique sans restriction au barycentre G du système considéré.  
11 Interpréter et calculer  $(\overrightarrow{G_x Q_x} \wedge d\vec{f}) \cdot \hat{z}$  avec  $Q_x$  un point de la section droite de la plaque.  
12 Faire un schéma donnant la variation  $dv$  de la position de  $G_x$  quand on avance d'une longueur  $dx$ .  
15 Ne pas s'attarder sur cette question purement calculatoire et sans intérêt pour la suite du problème.  
18 Se rappeler qu'une onde progressive vers la droite fait intervenir  $\omega t - kx$  avec  $\omega$  et  $k$  strictement positifs.  
19 Faire le lien avec les moment et force à l'origine.  
21 Penser au caractère dispersif des ondes étudiées.

### Troisième partie

- 23 Calculer  $\int_{\Omega} \sigma_{xx,x} u^* dS$  et  $\int_{\Omega} \sigma_{xy,y} u^* dS$  puis procéder par analogie.  
24 Prendre la trace de l'équation (4) pour exprimer  $\text{Tr}([\sigma])$  en fonction de  $\text{Tr}([\varepsilon])$ .  
27 Le produit matriciel est associatif, c'est-à-dire que

$$({}^t \underline{U}^* \cdot \underline{\phi}) \cdot ({}^t \underline{\phi} \cdot \underline{U}) = {}^t \underline{U}^* \cdot (\underline{\phi} \cdot {}^t \underline{\phi}) \cdot \underline{U}$$

- 32 On a quatre équations, une pour la valeur de  $\varphi$  à chaque sommet du carré.  
33  $\varphi(\xi, \eta)$  se factorise pour une intégration plus facile en

$$\varphi(\xi, \eta) = \left( \frac{1}{2} - \frac{\xi}{\ell_x} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{\eta}{\ell_y} \right)$$

- 38 À quoi ressemble une fonction sinusoïdale échantillonnée sur une grille ?

## MODÉLISATION DE LA PROPAGATION DES ONDES DE CHOC DANS LA STRUCTURE D'ARIANE 5

**1** On pourrait d'abord penser que l'utilisation de trois cordons explosifs plutôt qu'un seul répond à une nécessité de symétrie dans la découpe. En effet, avec un seul cordon, l'explosion se propageant sur la circonférence d'Ariane, un couple exercé par le bout d'étage principal encore attaché sur l'étage secondaire pourrait apparaître ; il serait capable d'incurver sa trajectoire. Néanmoins, une rapide estimation permet d'obtenir le temps de découpe. En effet, on peut évaluer à environ 5 m le diamètre de la fusée à l'endroit de la coupe d'après la figure 2 de l'énoncé. Connaissant la vitesse de propagation de l'explosion d'à peu près  $7 \text{ km.s}^{-1}$  donnée un peu plus loin dans le texte, on en déduit qu'il faut un temps  $\pi \times 5/7.10^3 \approx 2 \text{ ms}$  pour séparer les deux étages. Sur une telle échelle de temps, le couple dû à l'asymétrie de découpe ne serait pas suffisant pour avoir un effet notable.

Si ce n'est la symétrie, qu'est-ce ? Il est un principe en astronautique qui dit qu'il ne faut pas laisser à un seul système l'autorité de contrôler toute la mission. C'est pourquoi tous les dispositifs importants (processeurs, programmes, gyroscopes) sont doublés ou triplés au cas où l'un d'entre eux tomberait en panne : c'est le principe de redondance. La présence de trois cordons permet donc de pallier un défaut d'allumage d'un voire de deux d'entre eux, la probabilité qu'ils faillissent tous les trois à leur tâche devenant suffisamment faible pour être acceptable.

### I. ESSAIS EXPÉRIMENTAUX ET OBSERVATION DES PHÉNOMÈNES MIS EN JEU

**2** Une jauge de déformation est un capteur qui traduit une déformation mécanique (par exemple une élongation) en signal électrique. Elle sont le plus souvent basées sur les effets de piézo-résistance, c'est-à-dire la variation de la résistance du capteur en fonction de la déformation. Imaginons un capteur constitué d'un morceau de métal conducteur. Sa résistance est donnée par  $R = \rho \ell / S$  en notant  $\rho$  sa résistivité,  $S$  sa section et  $\ell$  sa longueur. Si l'on suppose que la longueur du morceau varie de  $\Delta \ell$ , la résistivité et la section restant inchangée, alors la résistance varie de

$$\Delta R = \rho \frac{\Delta \ell}{S}$$

Cette variation est convertible en tension à l'aide d'un dispositif tel qu'un pont de Wheatstone par exemple.

**3** Commençons par les mouvements membranaires. Si la plaque subit une compression selon  $x$  ou  $z$ , les capteurs de chaque côté sont comprimés de la même façon. La demi-somme de leurs deux signaux est donc équivalente au signal de l'un ou de l'autre.

Si au contraire le mouvement se fait selon  $y$ , les deux capteurs sont déformés à l'inverse (l'un étant au-dessus et l'autre au-dessous), donnant lieu à des signaux opposés l'un à l'autre que l'on peut récupérer à l'identique avec la demi-différence.

Considérons à présent un mouvement quelconque. La partie symétrique des signaux des deux faces donnée par leur demi-somme correspond à une déformation qui se fait de la même manière au-dessus et au-dessous, donc à un mouvement membranaire puisque le mouvement hors plan donne une déformation opposée et disparaît lors de la somme. Inversement, la demi-différence permet de supprimer la déformation symétrique des mouvements dans le plan pour ne garder que la déformation antisymétrique des mouvements hors plan.

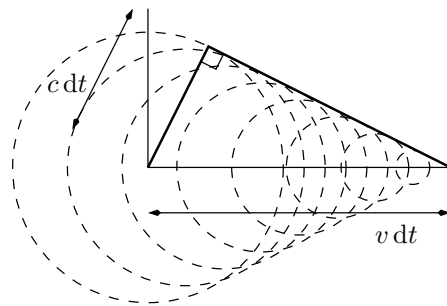
On aurait aussi pu invoquer l'unicité de la décomposition du signal en modes symétrique (mouvements membranaires) et antisymétrique (mouvements de flexion).

**4** Une propagation est dite dispersive quand la vitesse de phase  $\omega/k$  associée est différente de la vitesse de groupe  $d\omega/dk$  correspondante. En d'autres termes, cela veut dire que toutes les ondes ne se propagent pas à la même célérité.

Les ondes de flexion ont une propagation dispersive car on remarque que pour une distance  $x$  donnée dans la plaque, on observe tout d'abord des ondes de courtes longueurs d'onde puis des ondes de longueur d'onde de plus en plus grande, preuve que les courtes longueurs d'onde se propagent plus vite que les longues.

**5** Les ondes de compressions se propagent de manière circulaire autour de leur point d'émission à la célérité  $c$  de l'onde considérée. Le point d'émission lui-même se déplace à la vitesse  $v > c$  de l'explosion du cordon. On assiste donc à l'apparition d'un front d'onde qui est tel que

$$\frac{c}{v} = \sin \theta$$



L'application numérique avec les données fournies en dernière page de l'énoncé donne

$$c_P = 5,65 \text{ km.s}^{-1} \quad \text{et} \quad c_S = 3,12 \text{ km.s}^{-1}$$

d'où

$$\theta_P = 53,9^\circ \quad \text{et} \quad \theta_S = 26,5^\circ$$

en très bon accord avec les valeurs mesurées sur la figure.

On retrouve ici la forme caractéristique du sillage sonore d'un avion en vol supersonique où la vitesse  $v$  de l'avion est supérieure à la célérité  $c$  du son. Des sillages du même type se retrouvent plus aisément à l'arrière des bateaux si la vitesse du bateau est plus grande que celle de propagation des vagues à la surface de l'eau.

**6** Expérimentalement, l'examen de la figure 8 de l'énoncé montre que les ondes de flexion se propagent préférentiellement dans une seule direction (celle de l'axe  $x$ ), d'où l'intérêt d'établir un modèle à une seule dimension. Au contraire, la figure 9 montre qu'il existe deux types d'ondes membranaires dont les directions de propagation ne sont pas identiques. L'interprétation de ce front à partir du modèle des « ronds dans l'eau » amène naturellement l'hypothèse d'une propagation à deux dimensions.