X/ENS Maths PSI 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Dujardin (ENS Cachan) ; il a été relu par Sophie Rainero (Professeur en CPGE) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Cette épreuve d'analyse a pour objet de montrer que l'indice de rotation d'une courbe simple du plan, de classe $\mathscr{C}^2$ et régulière à l'ordre 1, a pour valeur $+1$ ou -1. Bien évidemment, la notion d'indice est introduite par l'énoncé et aucune connaissance hors programme n'est requise.

Le sujet se compose de quatre parties liées. On note T un réel strictement positif fixé et $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}$ l'ensemble des applications continues et T-périodiques définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'ensemble des complexes unimodulaires $\mathbb{U}$.

- Dans la première partie, on montre notamment (question 4) que tout élément de $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}$ possède un relèvement, c'est-à-dire que pour tout $u \in \mathcal{F}_{\mathrm{T}}$, il existe une fonction *continue* f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $u(x) = e^{if(x)}$ pour tout réel x.
- À partir de l'existence de relèvements, la deuxième partie définit la notion de degré pour $u \in \mathcal{F}_{\mathrm{T}}$ en posant
$$d_{\mathrm{T}}(u) = \frac{1}{2\pi}\big(f(a+\mathrm{T}) - f(a)\big)$$
On montre (question 6) que le degré $d_{\mathrm{T}}(u)$ est un entier, qui ne dépend pas du relèvement f de u choisi ni du point $a \in \mathbb{R}$ utilisé. Cette partie est l'occasion de comprendre (question 13) que $d_{\mathrm{T}}(u)$ compte, dans $\mathbb{Z}$, le nombre de tours complets effectués par la « trajectoire » u sur le cercle unité en une période T.
- La troisième partie introduit la notion d'homotopie entre éléments de $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}$: on dit que u et v, éléments de $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}$, sont homotopes s'il existe une application continue
$$\varphi\colon \begin{cases} [\,0\,;1\,] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U} \\ \quad (\lambda, t) \quad\longmapsto \varphi_\lambda(t) \end{cases}$$
telle que φ_λ appartienne à $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}$ pour tout λ dans $[\,0\,;1\,]$, et vérifiant $\varphi_0 = u$ et $\varphi_1 = v$; c'est-à-dire, plus intuitivement, si l'on peut passer continûment de u à v en restant dans $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}$. Elle est l'occasion de montrer (question 18) que deux éléments de $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}$ sont homotopes si, et seulement si, ils ont le même degré.
- Dans la quatrième partie, on considère un arc de classe $\mathscr{C}^2$ du plan (identifié à $\mathbb{C}$), régulier à l'ordre 1, défini par un paramétrage T-périodique Γ. L'application tangente normalisée (c'est-à-dire $\Gamma'/\,|\Gamma'|$) d'un tel arc est un élément de $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}$. Cette observation permet de définir la notion d'indice de l'arc à partir du degré de l'application tangente normalisée. L'objet principal de cette dernière partie est la construction explicite d'une homotopie entre l'application tangente de l'arc (supposé simple) et un élément de $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}$ de degré ± 1. On montre ainsi finalement que l'indice d'un arc simple, de classe $\mathscr{C}^2$, régulier à l'ordre 1, défini par un paramétrage T-périodique, est ± 1.

Très long pour une épreuve de quatre heures, ce sujet bien construit est l'occasion de réviser de nombreuses notions d'analyse du programme des deux années de classes préparatoires et constitue à coup sûr une excellente préparation aux épreuves de concours.

Indications

Première partie

4 Il y a une erreur d'énoncé : il faut chercher $w \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ uniquement T-périodique (et pas nécessairement dans $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}^1$, c'est-à-dire pas nécessairement à valeurs dans $\mathbb{U}$). Penser à un théorème de Weierstrass.

5 Se servir du fait que $f-g$ est un relèvement de la fonction constante égale à 1 et du théorème des valeurs intermédiaires.

Deuxième partie

6 Utiliser la question 5.

7 Écrire que $|f(a+\mathrm{T})-f(a)| \geqslant 2k\pi$ et appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

8 Se servir de la question 7.

10 Montrer que $u-v$ n'est pas surjective et utiliser les questions 8 et 9.

11 S'inspirer du raisonnement de la question 1.

12 Utiliser le fait que la série de Fourier de u' converge vers u' en moyenne quadratique et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Troisième partie

15 Considérer une homotopie φ entre u et v et utiliser la question 10 pour montrer que l'application $\lambda \mapsto d_{\mathrm{T}}(\varphi_\lambda)$ est continue sur $[\,0\,;1\,]$.

17 Pour un relèvement f de u, étudier l'application φ définie sur $[\,0\,;1\,]\times[\,0\,;\mathrm{T}\,]$ par $\varphi(\lambda,t)=e^{i\lambda f(t)}$.

18 Considérer la fonction $u/v \in \mathcal{F}_{\mathrm{T}}$ et utiliser la question précédente.

Quatrième partie

19 Erreur d'énoncé : faire le calcul pour $n \neq 0$.

20 Erreur d'énoncé : montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{\mathrm{T}_\Gamma}(t) \neq -i$ et utiliser la question 8.

21 Montrer que la courbure γ vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) = -i\overline{\Gamma'(t)}\Gamma''(t)$ et utiliser le résultat de la question 11.

23 Remarquer que F est une fonction de $x-y$.

25 Observer que $\mathrm{S}_\Gamma = \mathrm{F}\times\mathrm{G}$ sur U privé de la première bissectrice. Utiliser les résultats de la question 22 pour étendre les résultats.

26 Utiliser la périodicité de Γ pour se ramener à une fonction réelle continue sur un compact.

29 Il manque des parenthèses dans la définition de f donnée par l'énoncé. Considérer la fonction $f : [\,0\,;\mathrm{T}\,] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{Arcsin}\Big(\operatorname{Im}\big(u_0(t)\big)\Big) & \text{si } t \in [\,0\,;\mathrm{T}/2\,[\\ 2\operatorname{Arcsin}\Big(\operatorname{Im}\big(u_0(\mathrm{T}/2)\big)\Big) - \operatorname{Arcsin}\Big(\operatorname{Im}\big(u_0(t)\big)\Big) & \text{si } t \in [\,\mathrm{T}/2\,;\mathrm{T}\,] \end{cases}$$

30 Montrer que φ est lipschitzienne sur $[\,0\,;1\,]\times[\,0\,;\mathrm{T}\,]$ et utiliser le résultat de la question 14.

Première partie

> Rappelons que si $a \in \mathbb{C}$ est tel que $|a| = 1$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a = e^{i\lambda}$. En outre, l'équation d'inconnue $\mu \in \mathbb{C}$ $a = e^{i\mu}$ admet exactement $\lambda + 2\pi\mathbb{Z}$ comme ensemble de solutions.
>
> Soit $u \in \mathcal{F}_{\mathrm{T}}$. Si $x \in \mathbb{R}$, alors $|u(x)| = 1$ et il existe $f(x) \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = e^{if(x)}$. Bien entendu, il existe une infinité de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant cette relation. Rien n'assure que la fonction f peut être choisie continue sur $\mathbb{R}$. Ce résultat sera l'objet de la question 4. Dans un premier temps, on va montrer à la question 1 que si $u \in \mathcal{F}_{\mathrm{T}}^1$, alors f peut être choisie de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1 Remarquons que si $u \in \mathcal{F}_{\mathrm{T}}^1$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |u(x)|^2 = u(x)\overline{u(x)} = 1$$

En particulier, $u(x) \neq 0$ et $1/u(x) = \overline{u(x)}$. Soit f un relèvement dérivable de u. La relation

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad u(x) = e^{if(x)}$$

fournit par dérivation $\quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad u'(x) = if'(x)e^{if(x)} = if'(x)u(x)$

Par conséquent, $\quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = -i\,\overline{u(x)}u'(x)}$

Réciproquement, soit $u \in \mathcal{F}_{\mathrm{T}}^1$. La fonction $x \mapsto |u(x)|^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et constante sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée vérifie donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad u'(x)\overline{u(x)} + \overline{u'(x)}u(x) = 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{u'(x)}u(x)\right) = 0$$

Ainsi, la fonction $x \longmapsto -i\,\overline{u(x)}u'(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Puisque $|u(0)| = 1$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(0) = e^{i\lambda}$. Notons f la primitive de la fonction $x \longmapsto -i\,\overline{u(x)}u'(x)$ qui vaut λ en 0. La fonction f est alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Considérons la fonction

$$v : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \dfrac{e^{if(x)}}{u(x)} \end{cases}$$

La fonction v est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car les fonctions f, u et $y \mapsto e^{iy}$ le sont et u ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En outre,

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} \qquad v'(x) &= \frac{if'(x)e^{if(x)}u(x) - u'(x)e^{if(x)}}{u^2(x)} \\
&= \frac{i\big(-i\,\overline{u(x)}u'(x)\big)e^{if(x)}u(x) - u'(x)e^{if(x)}}{u^2(x)} \\
&= \frac{u'(x)\overline{u(x)}u(x)e^{if(x)} - u'(x)e^{if(x)}}{u^2(x)} \\
&= \frac{u'(x)e^{if(x)} - u'(x)e^{if(x)}}{u^2(x)} \\
v'(x) &= 0
\end{aligned}$$

Par suite, la fonction v est constante sur $\mathbb{R}$. Puisque $v(0) = \dfrac{e^{if(0)}}{u(0)} = \dfrac{e^{i\lambda}}{e^{i\lambda}} = 1$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad u(x) = e^{if(x)}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{Toute fonction } u \in \mathcal{F}_{\mathrm{T}}^1 \text{ admet un relèvement qui est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ et est une primitive de } -i\overline{u}u'.}$$

2 Soient $u, v \in \mathcal{F}_{\mathrm{T}}$ admettant f et g comme relèvements respectifs. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (uv)(x) &= u(x)v(x) \\ &= e^{if(x)}e^{ig(x)} \\ &= e^{i(f(x)+g(x))} \\ (uv)(x) &= e^{i(f+g)(x)} \end{aligned}$$

Remarquons que $uv \in \mathcal{F}_{\mathrm{T}}$ et que $f+g$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour affirmer que

$$\boxed{f+g \text{ est un relèvement de } uv.}$$

> Il est facile de se rendre compte qu'en vertu des résultats du cours sur la continuité des fonctions numériques, $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}$ est un groupe pour la multiplication des applications, dont l'élément neutre est la fonction constante égale à 1.

3 Soit $z \in \mathbb{U}$ tel que $\mathrm{Re}\,(z) \geqslant 0$. Écrivons

$$z = x + iy$$

avec $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Puisque $x \geqslant 0$, il existe $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Par conséquent, $$y = \sin\theta$$

Puisque $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on en déduit

$$\theta = \mathrm{Arcsin}\ y$$

> Rappelons que la fonction sinus induit une bijection du segment $[-\pi/2\,;\pi/2]$ dans $[-1\,;1]$. La bijection réciproque de cette application est par définition la fonction Arcsin.

Finalement, $$\boxed{z = e^{i\,\mathrm{Arcsin}\ y}}$$

Soit $u \in \mathcal{F}_{\mathrm{T}}$ telle que $\|u-1\|_\infty \leqslant \sqrt{2}$. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et écrivons

$$u(x) = a(x) + ib(x) \qquad \text{avec} \qquad (a(x), b(x)) \in \mathbb{R}^2.$$

Remarquons que $$\begin{aligned} |u(x)-1|^2 &= (a(x)-1)^2 + b^2(x) \\ &= a^2(x) - 2a(x) + 1 + b^2(x) \end{aligned}$$