Mines Maths 2 PSI 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tristan Poullaouec (Professeur agrégé) ; il a été relu par Gilbert Monna (Professeur en CPGE) et David Lecomte (Professeur en CPGE).

L'objectif de ce problème d'analyse, qui traite de séries de Fourier à deux variables, est de résoudre l'équation de la chaleur $\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} = \Delta \mathrm{T}$ en dimension deux. Il est constitué de deux parties, la seconde utilisant les résultats et les idées de la première.

- La première partie propose de généraliser aux fonctions de deux variables réelles doublement 2π-périodiques les résultats du cours sur les séries de Fourier : on introduit les coefficients doubles de Fourier avant d'établir un homologue de la formule de Parseval. Ensuite, on montre que la série double de Fourier d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ converge (normalement) vers cette fonction et que l'on peut la dériver terme à terme indéfiniment.
- La seconde partie s'appuie sur ces résultats pour résoudre l'équation de la chaleur avec une condition initiale. On établit l'existence d'une solution sous la forme d'une série double de Fourier dont les coefficients dépendent du temps, avant de s'assurer que c'est la seule.

C'est un sujet de difficulté moyenne, qui aborde des notions à la limite du programme et qui reste raisonnablement court. La rédaction peut toutefois s'avérer fastidieuse, car il faut adapter aux séries doubles des résultats sur les séries de fonctions. En outre, les vérifications des conditions d'application des théorèmes de dérivation sous le signe somme ou sous le signe intégral sont plutôt lourdes. Ce problème vous permettra de vérifier que vous maîtrisez les séries de Fourier, les séries de fonctions et les intégrales à paramètre.

Indications

Partie I

1 Pour la continuité, noter que u est bornée sur $\mathbb{R}^2$. Ensuite, appliquer la formule de Parseval à la fonction u_m.

2 Procéder de même avec la fonction $u(\cdot, y) : x \mapsto u(x, y)$.

3 Prouver que $\sum |u_m|^2$ converge normalement sur $\mathbb{R}^2$ afin de l'intégrer terme à terme sur $[\,0\,;2\pi\,]$. Faire alors appel aux résultats des questions 1 et 2.

On peut aussi montrer que les sommes partielles sont majorées, puis établir la relation demandée à l'aide du théorème de convergence dominée.

4 Établir, à l'aide de la condition de décroissance rapide de la suite $(a_{m,n}(u))$, une double convergence normale afin de traiter la question 5 dans la foulée.

6 Procéder comme à la question 4 avec les séries des dérivées partielles.

7 Utiliser (en l'adaptant) la question 5 pour intervertir les sommes et l'intégrale.

8 Adopter la même démarche qu'à la question précédente.

9 Appliquer la relation (**2**) à la fonction $v - u$.

Partie II

11 Généraliser le résultat précédent à $a_{m,n}\left(\dfrac{\partial^{k+\ell} u_0}{\partial x^k \partial y^\ell}\right)$ pour $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$.

12 Ne pas tenir compte du terme $\alpha_{m,n}$ dans l'expression de u proposée dans l'énoncé. Utiliser le résultat de la question 11 pour montrer que la fonction obtenue est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et dérivable terme à terme sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$.

13 Noter que la fonction u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$, ce qui permet de dériver E_u sous le signe intégral.

14 Partir du membre de droite et faire intervenir la relation (**4**).

15 Combiner les résultats des questions 13 et 14.

16 Si u et v sont deux solutions du problème, que peut-on dire de E_{u-v} ?

I. Série de Fourier à deux variables

1 Soit m un entier relatif. Pour tout réel y, on a

$$u_m(y+2\pi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x, y+2\pi)\, e^{-imx}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,y)\, e^{-imx}\, \mathrm{d}x$$

puisque la fonction $u(x,\cdot) : y \mapsto u(x,y)$ est 2π-périodique, si bien que

$$u_m(y+2\pi) = u_m(y)$$

Ceci prouve que $\boxed{\text{La fonction } u_m \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$

La fonction u est de plus continue sur $\mathbb{R}^2$ donc bornée sur le compact $[\,0\,;2\pi\,]^2$. Comme elle est doublement 2π-périodique, elle est alors bornée sur $\mathbb{R}^2$; on notera $\|u\|_\infty$ la borne supérieure de $|u|$. Ainsi :

- pour tout $x \in [\,0\,;2\pi\,]$, la fonction $y \mapsto u(x,y)\, e^{-imx}$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto u(x,y)\, e^{-imx}$ est continue donc intégrable sur l'intervalle $[\,0\,;2\pi\,]$;
- pour tout $(x,y) \in [\,0\,;2\pi\,] \times \mathbb{R}$, on a $\left|u(x,y)\, e^{-imx}\right| \leqslant \|u\|_\infty$ qui – comme toutes les fonctions constantes – est intégrable sur tout segment.

On déduit du théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre que

$$\boxed{\text{La fonction } u_m : y \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,y)\, e^{-imx}\, \mathrm{d}x \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

La fonction u_m est donc continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$a_{m,n}(u) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,y)\, e^{-imx}\, e^{-iny}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_m(y)\, e^{-iny}\, \mathrm{d}y$$

est le n^{e} coefficient de Fourier de cette fonction : on déduit alors de la formule de Parseval que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u_m(y)|^2\, \mathrm{d}y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_{m,n}(u)|^2$$

soit

$$\boxed{\int_0^{2\pi} |u_m(y)|^2\, \mathrm{d}y = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_{m,n}(u)|^2}$$

> Comme le signale le rapport du jury, lorsque l'on veut utiliser le théorème de continuité sous le signe somme, il faut veiller à « montrer que les hypothèses de ce théorème sont bien satisfaites afin d'en tirer les conclusions souhaitées ».

2 Soit y un réel. La fonction $u(\cdot,y) : x \mapsto u(x,y)$ est continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$; pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$u_m(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,y) e^{-imx}\, \mathrm{d}x$$

est le m^{e} coefficient de Fourier de cette fonction.

On déduit à nouveau de la formule de Parseval que

$$\boxed{\sum_{m\in\mathbb{Z}} |u_m(y)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(x,y)|^2\, \mathrm{d}x}$$

3 Soit m un entier relatif non nul. En utilisant la relation entre les coefficients de Fourier d'une fonction 2π-périodique de classe $\mathscr{C}^1$ et ceux de sa dérivée, on obtient

$$\forall\, y \in \mathbb{R} \qquad u_m(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,y)\, e^{-imx}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2im\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\, e^{-imx}\, \mathrm{d}x$$

si bien que $$\forall\, m \in \mathbb{Z}^* \qquad \|u_m\|_\infty \leqslant \frac{1}{|m|}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_\infty$$

d'après l'inégalité triangulaire.

> On retrouve la relation évoquée ci-dessus au moyen d'une simple intégration par parties sur $[\,0\,;2\pi\,]$; en l'occurrence, on a pour tout réel y
>
> $$\frac{\partial}{\partial x}\left[u(x,y)\, e^{-imx}\right] = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\, e^{-imx} - im\, u(x,y)\, e^{-imx}$$
>
> En intégrant l'égalité précédente par rapport à x sur l'intervalle $[\,0\,;2\pi\,]$, il vient
>
> $$\left[u(x,y)\, e^{-imx}\right]_{x=0}^{x=2\pi} = 0 = \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\, e^{-imx}\, \mathrm{d}x - im\int_0^{2\pi} u(x,y)\, e^{-imx}\, \mathrm{d}x$$
>
> soit $$\frac{1}{2im\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\, e^{-imx}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,y)\, e^{-imx}\, \mathrm{d}x$$

On sait, grâce au critère de Riemann, que la série numérique $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}^*} 1/m^2$ est convergente ; on déduit alors de l'inégalité établie précédemment que :

- la série de fonctions continues $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}} |u_m|^2$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc sa somme est continue et intégrable terme à terme sur tout segment ; ainsi,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{m\in\mathbb{N}} |u_m(y)|^2\right) \mathrm{d}y = \sum_{m\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u_m(y)|^2\ \mathrm{d}y\right) \in \mathbb{R}$$

- la série de fonctions continues $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}^*} |u_{-m}|^2$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc sa somme est continue et intégrable terme à terme sur tout segment ; ainsi,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{m\in\mathbb{N}^*} |u_{-m}(y)|^2\right) \mathrm{d}y = \sum_{m\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u_{-m}(y)|^2\ \mathrm{d}y\right) \in \mathbb{R}$$

En additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient grâce à la linéarité de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |u_m(y)|^2\right) \mathrm{d}y = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u_m(y)|^2\ \mathrm{d}y\right) \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

> Comme on vient de le voir, les propriétés usuelles des séries de fonctions indexées sur $\mathbb{N}$ (continuité de la somme, dérivabilité et intégrabilité terme à terme) s'étendent sans aucun problème aux séries de fonctions indexées sur $\mathbb{Z}$: il suffit pour cela de séparer les indices positifs des indices négatifs. Par la suite, nous nous permettrons donc de manipuler directement des séries indexées sur $\mathbb{Z}$.