Mines Maths 1 PSI 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Francesco Colonna Romano (Professeur en CPGE); il a été relu par Julien Lévy (Professeur en CPGE) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Ce problème étudie l'opérateur translation, qui à une fonction ou un polynôme f associe la fonction $x \mapsto f(x+a)$. Le but est de déterminer ses valeurs propres, vecteurs propres et espaces stables de dimension finie.

- La première partie introduit une matrice particulière, qui se révélera utile dans la suite du problème. La deuxième question doit impérativement être résolue pour que l'on puisse réutiliser dans la partie II son résultat, car celui-ci n'est pas donné par l'énoncé.
- La deuxième partie étudie l'espace des polynômes à coefficients complexes de degré au plus k, noté $\mathbb{C}_k[\mathrm{X}]$, et les opérateurs dérivation et translation. Dans les premières questions, on calcule les valeurs propres et espaces propres de ces applications. On détermine ensuite les sous-espaces de $\mathbb{C}_k[\mathrm{X}]$ laissés stables par chacune d'entre elles.
- La troisième partie est indépendante des deux précédentes. Elle présente aussi l'étude de sous-espaces de dimension finie stables par translation, mais l'espace considéré est ici l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques. La démonstration repose sur l'emploi des coefficients de Fourier exponentiels, mais ne demande presque aucune connaissance sur les séries associées (et notamment aucun résultat sur la convergence).

Le sujet est découpé en questions assez courtes qui s'enchaînent de manière logique; il est dès lors très important de suivre et de comprendre la démarche de l'auteur. Le sujet paraîtra agréable, bien construit et modérément difficile pour peu que l'on aborde les parties dans l'ordre, tout en conservant un aperçu global des objectifs du problème. En revanche, chercher à répondre aux questions dans le désordre en grappillant des points sans comprendre le raisonnement d'ensemble risque de se révéler très contre-productif.

Indications

1 Que vaut $\mathrm{L}_i(a_j)$?

2 Écrire $\mathrm{X}^k = \sum\limits_{i=0}^{n} m_{ik}\,\mathrm{L}_i(\mathrm{X})$ et remplacer X par des valeurs bien choisies.

4 Pour trouver les polynômes vérifiant $\mathrm{P}(\mathrm{X}+a) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$, considérer une racine de P dans $\mathbb{C}$ et voir ce que cela implique sur les autres racines.

5 Considérer la suite des dérivées d'un polynôme de degré maximal dans F. Montrer que cette famille est libre. Quel espace engendre-t-elle ?

6 Quels sont les degrés des polynômes de la famille considérée ?

7 Penser à la formule de Taylor. Remarquer ensuite que la matrice obtenue ressemble à celle de la question 2. Les résultats de la première partie permettent-ils d'affirmer que cette matrice est inversible ?

9 Utiliser le résultat de la question 7. Lorsque P est de degré j, quel est l'espace engendré par la famille

$$\{\mathrm{P}(\mathrm{X}), \mathrm{P}(\mathrm{X}+a), \ldots, \mathrm{P}(\mathrm{X}+j\,a)\}$$

12 Pour trouver les valeurs propres, utiliser la formule de la question précédente. En ce qui concerne les vecteurs propres, certains d'entre eux sont censés être évidents : pouvez-vous les citer ?

13 Les ${t_a}^k(f)$ peuvent-ils être linéairement indépendants ?

14 Considérer le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum\limits_{j=0}^{p} \alpha_j \mathrm{X}^j$, les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ étant ceux définis à la question 13. Que peut-on dire de ses racines ?

15 Se placer dans une base $\{f_1, \ldots, f_p\}$ de F.

16 Pour toute fonction f de F, trouver une fonction g dans G ayant les mêmes coefficients de Fourier que f. Comment conclure que $f = g$?

Les conseils du jury

Le rapport du jury constate que « l'algèbre linéaire reste une partie difficile pour les candidats ». Ces derniers doivent mieux acquérir « les notions fondamentales d'algèbre telles que l'injectivité, les familles libres et génératrices, la traduction en calcul matriciel » et éviter « les maladresses dans les rudiments du calcul élémentaire ». Enfin, le rapport du jury signale « quelques grosses erreurs qu'on ne devrait plus trouver à ce niveau :

- diviser par un vecteur ;
- exhiber un vecteur propre nul ;
- penser qu'une exponentielle peut s'annuler, ou affirmer que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a} > 0$ lorsque a est complexe. »

I. Préliminaires

1 Remarquons que les polynômes L_i sont de degré n, ont pour racines les a_j pour $j \neq i$ et vérifient $\mathrm{L}_i(a_i) = 1$.

> Les L_i ne sont définis que lorsque les a_i sont distincts.

Comme on a une famille de $n+1$ éléments de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ qui est lui-même de dimension $n+1$, pour montrer qu'il s'agit d'une base, il suffit de démontrer que c'est une famille libre. Soient donc des complexes $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\lambda_0 \, \mathrm{L}_0(\mathrm{X}) + \cdots + \lambda_n \, \mathrm{L}_n(\mathrm{X}) = 0$$

En remplaçant X par a_i, tous les termes de la somme s'annulent, sauf le i^{e} qui vaut λ_i. D'où $\lambda_i = 0$. Comme ce raisonnement est vrai pour tout i, tous les coefficients sont nuls, la famille est libre, il s'agit d'une base.

$$\boxed{\text{La famille } (\mathrm{L}_i)_{i \in [\![0\,;\,n]\!]} \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[\mathrm{X}].}$$

> Le rapport du jury précise que « beaucoup reconnaissent les polynômes d'interpolation de Lagrange, mais parfois on a beaucoup de mal à justifier qu'ils constituent une base. »

2 Décomposons chaque polynôme X^k dans la base des L_i

$$\mathrm{X}^k = \sum_{i=0}^{n} m_{i,k} \, \mathrm{L}_i(\mathrm{X})$$

En remplaçant X par a_j il vient $m_{j,k} = {a_j}^k$. On peut alors écrire la matrice M demandée en mettant en colonnes les coordonnées de chacun des polynômes X^k.

$$\boxed{\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & {a_0}^2 & \cdots & {a_0}^n \\ 1 & a_1 & {a_1}^2 & \cdots & {a_1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & {a_n}^2 & \cdots & {a_n}^n \end{pmatrix}}$$

La famille $(1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ et $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n)$ aussi. On a donc ici deux bases du même espace. M étant la matrice de passage entre ces deux bases, elle est inversible.

> Cette matrice s'appelle matrice de Vandermonde, vous l'avez probablement rencontrée dans le chapitre sur les déterminants. Le déterminant de cette matrice vaut
>
> $$\det \mathrm{M} = \prod_{i<j} (a_i - a_j)$$
>
> D'après le rapport, cette question est bien traitée « par ceux qui connaissent ou retrouvent les résultats habituels sur la méthode d'interpolation de Lagrange. Sinon on part dans des calculs d'une grande maladresse, ou parfois on confond les rôles joués par les deux bases utilisées. »

II. Fonctions polynomiales

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(\mathrm{X}^n) = n\,\mathrm{X}^{n-1}$. La matrice D s'obtient en écrivant les coordonnées de $d(\mathrm{X}^n)$ dans la base $\mathcal{B}$ dans la n^{e} colonne.

$$\boxed{\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

De même, $$t_a(\mathrm{X}^n) = (\mathrm{X}+a)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}\,\mathrm{X}^i$$

On obtient la matrice T_a en écrivant dans la n^{e} colonne les coordonnées de $t_a(\mathrm{X}^n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\boxed{\mathrm{T}_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^k \\ 0 & 1 & \binom{2}{1} a & \cdots & \binom{k}{1} a^{k-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \binom{k}{2} a^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}$$

4 La matrice D est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, qui est composée de 0. On en déduit que 0 est la seule valeur propre de D. L'espace propre associé est le noyau, composé des polynômes de dérivée nulle (parce que d est l'application dérivation !), c'est-à-dire les polynômes constants. C'est un espace de dimension 1.

De même, comme T_a est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, sa seule valeur propre est 1. Cherchons l'espace propre associé. Il s'agit de trouver les polynômes P vérifiant $t_a(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+a) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$. Remarquons que les polynômes constants vérifient cette relation. Montrons que ce sont les seuls.

Si P était de degré supérieur ou égal à 1, il aurait par exemple une racine b dans $\mathbb{C}$ (car tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$). Alors $\mathrm{P}(b) = 0 = \mathrm{P}(b+a)$, donc $b+a$ est aussi racine. En répétant ce raisonnement, il vient que pour tout entier j, $b + j\,a$ est une racine de P, et il y a une infinité de tels réels (car a est non nul). Or P ne peut avoir qu'un nombre fini de racines. On aboutit ainsi à une contradiction. Il s'ensuit que P est un polynôme constant. Ainsi,

> L'endomorphisme T_a a pour seule valeur propre 1, et l'espace propre associé est l'ensemble des polynômes constants, qui est de dimension 1.

Le jury constate que la plupart des candidats donnent les valeurs propres (grâce à la question 3), bien qu'ayant « beaucoup de mal à trouver les valeurs propres d'une matrice triangulaire. On trouve beaucoup d'imprécisions ou d'erreurs sur la détermination des sous-espaces propres ou leurs dimensions. »