E3A Maths B PSI 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Gilbert Monna (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Emmanuel Bougnol (Professeur en CPGE) et Chloé Mullaert (ENS Cachan).

Le sujet est composé de trois exercices de longueurs et difficultés variables, complètement indépendants et abordant différentes parties du programme.

- Le premier exercice s'intéresse au théorème de Rolle et à ses applications aux équations algébriques et à certaines fonctions. Sans grande difficulté, il offre une possibilité intéressante de revoir ce point fondamental du programme d'analyse de la classe supérieure.
- Le deuxième exercice porte sur l'algèbre euclidienne et commence par les classiques incontournables sur les matrices symétriques positives et définies positives. Fait inhabituel, ces dernières sont définies comme les matrices symétriques dont le spectre est dans $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$. On démontre ensuite une inégalité entre le déterminant d'une matrice symétrique réelle (qui est en fait le produit des valeurs propres) et le produit des termes diagonaux de la matrice. Il y a dans cette partie une intervention intéressante de l'inégalité de convexité généralisée, encore un point du cours de première année qu'il est bon de revoir. La partie B, très courte, est l'application de l'inégalité précédente pour démontrer une majoration de la valeur absolue du déterminant d'une matrice carrée d'ordre n quelconque. La partie C donne une application étonnante de l'inégalité précédente, puisqu'on l'utilise pour démontrer que l'inverse d'une fonction développable en série entière au voisinage de 0 et non nulle en 0 est développable en série entière au voisinage de 0. C'est un bon exercice de synthèse de l'algèbre euclidienne, à faire dès que le chapitre du cours est terminé.
- Le troisième exercice consiste en l'étude d'une intégrale généralisée dépendante d'un paramètre et on utilise, dans un contexte assez simple, les résultats classiques sur le sujet pour démontrer que la fonction est de classe $\mathscr{C}^2$. On détermine ensuite une équation différentielle vérifiée par la fonction étudiée, puis on en calcule un équivalent en 0. On passe ensuite à l'étude en $+\infty$. L'énoncé donnait deux indices, l'utilisation de la caractérisation séquentielle d'une limite et le théorème de convergence dominée ; encore des résultats classiques du programme d'analyse de spéciale que l'on a l'occasion de mettre en œuvre dans un cadre assez simple. On termine par une petite application à l'équation différentielle. On a là un exercice intéressant à travailler à la fin du chapitre sur les séries de fonctions, en laissant éventuellement de côté la dernière question si les équations différentielles linéaires du second ordre n'ont pas encore été traitées.

Indications

Exercice 1

2 Appliquer le théorème de Rolle à la fonction f, entre deux points consécutifs où elle s'annule.

3 Poser $h(x) = 10^{-30}\,a(x)$ puis appliquer la question précédente à h.

4 Procéder par récurrence, en posant $f_{n+1}(x) = x^{\alpha_{n+1}}\,f(x)$, puis appliquer la question précédente à la fonction f.

5 Appliquer la question précédente en séparant les racines positives et les racines négatives.

Exercice 2

A.1.a Poser $\mathrm{D}' = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ puis $\mathrm{M} = \mathrm{PD}'\,{}^t\mathrm{P}$.

A.1.b Poser $\mathrm{Y} = \mathrm{MX}$ puis vérifier que ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SX} = \|\mathrm{Y}\|^2$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

A.1.b En désignant par $(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n)$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, vérifier que ${}^t\mathrm{E}_j\,\mathrm{SE}_j = s_{jj}$ puis appliquer la question précédente.

A.2 Reprendre la question précédente, *mutatis mutandis*[1].

A.3 Si S est dans $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ et pas $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, elle a une valeur propre nulle.

A.4.a Utiliser la caractérisation des fonctions convexes de classe $\mathscr{C}^2$, puis appliquer l'inégalité de convexité aux réels $\ln(\lambda_i)$.

A.4.b Penser que la somme des valeurs propres est égale (dans le cas présent) à la trace.

A.5.a Utiliser la question A.2.b.

A.5.b Se servir de la question précédente avec X vecteur propre de S.

A.5.c Appliquer le résultat de la question A.4 à la matrice B.

B.1 Vérifier que ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ est symétrique positive.

B.2 Penser que $\det({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}) = [\det(\mathrm{A})]^2$.

C.1 Vérifier que $\mathrm{A}\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

C.2 Penser que $|a_n|\,r^n \leqslant 1$ à partir d'un certain rang puis montrer que

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} {a_n}^2\,r^{2n} \leqslant \mathrm{C}^2$$

C.3 Vérifier que $\det(\mathrm{A}') = \det(\mathrm{A}'')/r^{n(n+1)/2}$ puis appliquer l'inégalité d'Hadamard aux colonnes de A''.

C.4 Montrer que la série entière $\sum b_n x^n$ a un rayon de convergence non nul, puis, en faisant un produit de Cauchy, qu'elle répond à la question.

[1] Pour ceux qui auraient préféré l'option cuisine à l'option latin, cela veut dire « en changeant ce qui doit être changé ».

Exercice 3

1 Revenir à la définition de $\mathrm{o}\,(1/\,[a(t)]^p)$.

2 La fonction F est définie si et seulement si la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\,-x\,\mathrm{ch}\,(t)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

3 Appliquer le théorème de Leibniz.

4 Exprimer $\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}''(x)$ sous forme d'une intégrale, puis faire une intégration par parties.

5.a Pour montrer que H est définie, prouver que

$$\left|\mathrm{e}^{\,-xu}\left(\frac{1}{\sqrt{u^2-1}} - \frac{1}{u}\right)\right| \leqslant \frac{1}{\left(u\,\sqrt{u^2-1}\right)\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)} \leqslant \frac{1}{u^2\,\sqrt{u^2-1}}$$

Pour démontrer le caractère borné de H, intégrer l'inégalité

$$\left|\mathrm{e}^{\,-xu}\left(\frac{1}{\sqrt{u^2-1}} - \frac{1}{u}\right)\right| \leqslant \left|\frac{1}{\sqrt{u^2-1}} - \frac{1}{u}\right|$$

5.b Se servir de la convexité de l'exponentielle pour prouver que $\dfrac{1}{v} - \dfrac{\mathrm{e}^{\,-v}}{v} \leqslant 1$, puis intégrer.

5.c Utiliser le changement de variable $u = \mathrm{ch}\,(t)$

5.d Poser le changement de variable $v = xu$.

6 Pour les hypothèses de domination, remarquer que

$$x_n\,\mathrm{e}^{\,-x_n\,\mathrm{ch}\,(t)} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,(t)}\,x_n\,\mathrm{ch}\,(t)\,\mathrm{e}^{\,-x_n\,\mathrm{ch}\,(t)}$$

et $$x_n\,\mathrm{ch}\,(t)\,\mathrm{e}^{\,-x_n\,\mathrm{ch}\,(t)} = \frac{1}{x_n\,\mathrm{ch}\,(t)}\,{x_n}^2\,[\mathrm{ch}\,(t)]^2\,\mathrm{e}^{\,-x_n\,\mathrm{ch}\,(t)}$$

7.b Si le wronskien de deux solutions est nul, ces solutions sont linéairement dépendantes.

Exercice 1

1 Le théorème de Rolle s'exprime comme suit

> Soit f une fonction continue sur un segment $[\,a\,;b\,]$ et dérivable sur l'intervalle $]\,a\,;b\,[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un réel $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = 0$.

Vérifiez que vous connaissez bien le théorème avec ses hypothèses minimales : on apprend par le rapport du jury qu'un tiers seulement des candidats le cite correctement et qu'un tiers l'ignore totalement.

2 Soit $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ les p éléments de I en lesquels h est nulle. Étant donné que h est dérivable, on peut appliquer le théorème de Rolle à h entre a_i et a_{i+1} où $1 \leqslant i \leqslant p-1$. On en déduit l'existence de $p-1$ réels $b_i \in \,]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$, où $1 \leqslant i \leqslant p-1$, tels que $h'(b_i) = 0$.

> Si h s'annule p fois sur I, h' s'annule au moins $p-1$ fois sur I.

3 Posons $a(x) = x^{30}h(x)$ avec $h(x) = 3\,x^{-50}+x^{-40}+4\,x^{-20}+2\,x^{-10}+11$. Supposons par l'absurde que la fonction a s'annule au moins 5 fois sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Il en est de même pour h. La fonction h étant dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$, d'après la question précédente, h' s'annule au moins 4 fois sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Comme

$$h'(x) = -150\,x^{-51} - 40\,x^{-41} - 80\,x^{-21} - 20\,x^{-11} = b(x)$$

ceci est contraire à l'hypothèse qui dit que b s'annule trois fois au plus sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

> La fonction a s'annule au plus 4 fois sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Remarquons qu'il est clair sur les expressions de a et b qu'elles ne s'annulent ni l'une ni l'autre sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Malgré cela on peut quand même démontrer que *si* b s'était annulée au plus 3 fois, a se *serait* annulée au plus 4 fois.

4 Démontrons ce résultat par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{P}(n)$ la propriété

> « Pour tout élément $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et tout élément $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^{*n}$, la fonction f_n définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\,x^{\alpha_k}$ s'annule au plus $n-1$ fois. »

- La propriété $\mathscr{P}(1)$ est vraie car f_1 est une application de $]\,0\,;+\infty\,[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = \lambda_1\,x^{\alpha_1}$ avec λ_1 réel non nul, donc f_1 ne s'annule pas dans $]\,0\,;+\infty\,[$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Comme

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k\,x^{\alpha_k} = x^{\alpha_{n+1}}\,f(x) \qquad \text{où} \qquad f(x) = \lambda_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,x^{\alpha_k-\alpha_{n+1}}$$

f_{n+1} et f ont les mêmes zéros. Si f_{n+1} s'annule $n+1$ fois au moins, il en est de même de f et d'après la question 2, f' s'annule n fois au moins. De plus,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_{n+1})\,\lambda_k\,x^{\alpha_k-\alpha_{n+1}-1}$$

Pour tout entier $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$, $\lambda_k\,(\alpha_k - \alpha_{n+1})$ est un réel non nul et les exposants sont rangés par ordre croissant. La fonction f' vérifie donc l'hypothèse de récurrence à l'ordre n et s'annule ainsi au plus $n-1$ fois. La contradiction assure que f_{n+1} s'annule au plus n fois et le résultat est démontré par récurrence.