E3A Physique PC 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Stéphane Ravier (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Sandrine Ngo (ENS Cachan) et Emmanuel Bourgeois (Professeur en CPGE).

Cette épreuve, composée de trois parties qui sont assez largement indépendantes, étudie un échangeur thermique à fluide caloporteur. Les deux premières parties visent à établir quelques caractéristiques d'un système de chauffage régulé tandis que la troisième esquisse un modèle de contrôle de la qualité d'un réseau de tubes à partir d'une méthode non invasive.

- Dans la première partie, on s'intéresse à la conduction thermique dans une géométrie cylindrique. Après quelques rappels sur la conduction, on applique les résultats à un écoulement fluide parfait. La partie se termine sur des bilans énergétiques globaux à l'échelle d'une pièce. Le principal thème abordé est la thermodynamique des phénomènes diffusifs. Une large part est consacrée aux systèmes ouverts.
- La deuxième partie se focalise sur le contrôle du débit du fluide dans le but de réguler la puissance de chauffage. Le fluide est alors supposé newtonien. C'est l'occasion de redémontrer les résultats classiques de l'écoulement de Poiseuille plan et de formuler (et utiliser !) une analogie électrique pour faciliter l'analyse en présence de plusieurs dispositifs analogues. Le début de cette partie est essentiellement constitué de questions de mécanique des fluides newtoniens tandis que la fin fait davantage appel à la thermodynamique.
- La troisième partie est indépendante des deux précédentes. On cherche à montrer comment « sonder » des tubes pour en détecter certains défauts. Le dispositif s'appuie sur une bobine placée autour de la portion de tube à analyser, pour laquelle on établit les variations d'une propriété (la résistance apparente) par induction. L'avantage d'un tel dispositif est qu'il permet de sonder facilement et sans démontage de grandes longueurs de tube. Cette partie n'est pas difficile si l'on a bien compris la notion de flux du champ magnétique, notamment les notions de flux propre et flux induit.

L'ensemble forme un problème de longueur et de difficulté raisonnables. Il permet de faire le point sur les connaissances de base en conduction thermique, mécanique des fluides visqueux et induction. Notons qu'il est principalement centré sur les connaissances de deuxième année. En cours d'année, il peut être utilisé pour l'apprentissage de ces parties du programme.

Indications

Partie I

I.1.d Par définition, la puissance thermique sortant du cylindre est égale au flux du vecteur $\overrightarrow{j_{\mathrm{Q}}}$ sur la surface du cylindre.

I.1.e Faire un bilan énergétique sur un volume compris entre deux cylindres de rayons r et $r + \mathrm{d}r$.

I.2.b Les forces de pression s'exercent en amont et en aval : utiliser la définition de la puissance d'une force.

I.2.d Faire apparaître l'enthalpie massique $h = u + \mathrm{P}/\rho$ en rassemblant l'énergie interne et le travail des forces de pression.

I.3.a L'énoncé utilise, pour les relations (**1**) et (**2**) deux fois $\mathscr{P}_{\mathrm{th}}$ alors que les termes sont en fait opposés. Ne pas oublier d'introduire le signe moins !

I.3.d Pour prendre en compte la conduction thermique au sein du fluide, ajouter un terme au bilan énergétique (**1**) : il s'agit de la différence entre ce qui est « reçu » en z et ce qui est « cédé » en $z + \mathrm{d}z$ par la tranche de fluide.

I.4.b Écrire la solution générale de l'équation (**4**) pour pouvoir interpréter τ et $\mathrm{T_{st}}$.

Partie II

II.1.c Le fluide étant visqueux, il y a adhérence de ce dernier aux parois.

II.3.a Vérifier que les trois portions ainsi agencées sont montées en série. En déduire la loi d'association écrite en terme de conductances.

II.4.a Appliquer le théorème de la résultante cinétique à la pièce d'obstruction (C).

II.4.c La variation de volume $\delta\mathrm{V}$ du gaz de contrôle s'exprime simplement en fonction de la variation de position de (C) $\delta x = \varepsilon$.

II.4.d La situation à considérer est $\mathrm{T_{adm}} > \mathrm{T_{m0}} > \mathrm{T_{ext}}$.

II.5.f Dans une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{f}{\tau} = \mathrm{B}$$

une solution stationnaire n'existe que si $\tau > 0$ (sinon, f est exponentiellement croissante).

II.5.g Étudier la valeur de ξ dans ces conditions.

Partie III

III.1.c Utiliser la loi de Faraday qui lie les variations du flux du champ magnétique et la force électromotrice induite.

III.2.a Écrire à nouveau le champ magnétique créé par un solénoïde infini en tenant compte des hypothèses.

III.3.a Le champ induit est uniforme à l'intérieur de la bobine et nul à l'extérieur. La bobine est constituée de $n\,\ell$ spires identiques de rayon $\mathrm{R_m}$.

III.3.a Le flux total à travers la bobine est égal à la somme du flux propre et du flux du champ induit.

III.3.e Pour commenter, calculer $\delta\mathrm{R}/\mathrm{R}$ en supposant par exemple que la bobine est filiforme, qu'elle est fabriquée dans le même conducteur que le tube et a même dimension que ce dernier.

III.3.g Pour sonder tout le tube, il faut que les courants induits pénètrent au moins sur une épaisseur e.

Échangeur thermique à fluide caloporteur

Le rapport du jury de cette épreuve mentionne qu'elle n'a pas été bien réussie par les candidats. Les applications numériques, pourtant peu nombreuses, n'ont pas été bien traitées et la consigne, pourtant très explicite en début de problème, de donner exactement deux chiffres significatifs n'a été respectée que dans un tiers des copies. Signalons également que le barème prévoyait explicitement une bonification (qui atteignait au total environ 10 % du nombre total de points) pour les candidats qui traiteraient correctement une série de questions consécutives. Il était quasiment impossible d'avoir la moyenne sans avoir une partie de ces points. L'objectif, assumé, est de pénaliser les « grappilleurs de points ». Le rapport regrette que les calculs, pourtant peu exigeants dans cette épreuve, aient été fort mal conduits dans l'ensemble. La simple résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants semble insurmontable pour beaucoup de candidats.

Le rapport est également l'occasion de rappeler des conseils généraux :

- « Apprendre le cours de façon plus exigeante. La connaissance des formules ne suffit pas en elle-même. Il faut en comprendre le sens concret et en connaître le domaine d'application. »
- « Soigner les questions qualitatives et s'y entraîner pendant l'année. »
- « S'entraîner au calcul en résolvant soi-même les exercices (plutôt qu'en lisant des corrigés) et en menant les calculs jusqu'au bout ! »

I. Échanges thermiques à travers un tube cylindrique

I.1 Conductance thermique à travers un tube cylindrique

I.1.a La loi de Fourier est une loi phénoménologique qui relie le vecteur densité de courant thermique $\overrightarrow{\jmath_{\mathrm{Q}}}$ au gradient de température selon

$$\boxed{\overrightarrow{\jmath_{\mathrm{Q}}} = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{T}}$$

I.1.b Un transfert thermique spontané se fait toujours des zones de plus haute température vers celles de plus basse température. Ainsi, $\overrightarrow{\jmath_{\mathrm{Q}}}$ et $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{T}$ sont-ils colinéaires et de même sens. On en déduit que

$$\boxed{\text{La conductivité thermique } \lambda \text{ est une grandeur positive.}}$$

I.1.c La température ne dépendant ni de θ, ni de z, son gradient s'écrit simplement

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{T} = \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_r}$$

Ainsi, $$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{\jmath_{\mathrm{Q}}} \text{ est radial.}}$$

Ce sont des arguments d'invariance qui permettent d'expliquer pourquoi la température ne dépend pas de θ ou de z. En effet, on a une invariance par rotation autour de l'axe (Oz), ce qui justifie l'indépendance par rapport à la variable θ. En outre, le tube est de « très grande longueur », ce qui revient à dire que l'on peut négliger les effets de bords et considérer qu'il y a invariance par translation selon la direction $\overrightarrow{e_z}$ du système, ce qui assure l'indépendance par rapport à la variable z.

Rappelons l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z}$$

I.1.d Par définition, la puissance thermique sortante est égale au flux du vecteur densité de courant thermique à travers la surface du cylindre. Ceci s'écrit

$$\mathscr{P}_{\mathrm{th}} = \oiint_{\mathrm{cyl.}} \overrightarrow{j_{\mathrm{Q}}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}}$$

où $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}}$ est orienté selon la normale sortant du cylindre. On peut décomposer cette intégrale sur une surface fermée en trois intégrales sur des surfaces ouvertes : une pour chaque disque délimitant le cylindre (« supérieur » et « inférieur ») et une pour la surface latérale. Puisque $\overrightarrow{j_{\mathrm{Q}}}$ est radial, les faces supérieure et inférieure ont une contribution nulle à la puissance sortante. Il reste

$$\mathscr{P}_{\mathrm{th}} = \int_{z=0}^{\ell}\int_{\theta=0}^{2\pi} \overrightarrow{j_{\mathrm{Q}}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_r}$$

Puisque j_{Q} ne dépend ni de θ, ni de z, cette intégrale se réduit à

$$\boxed{\mathscr{P}_{\mathrm{th}} = 2\pi\,\ell\,r\,j_{\mathrm{Q}}(r)}$$

I.1.e Considérons le volume élémentaire de matériau délimité par deux cylindres de hauteur ℓ et de rayons respectifs r et $r+\mathrm{d}r$ (avec $\mathrm{R}_1 < r < \mathrm{R}_2$). Notons H l'enthalpie de ce système et faisons un bilan d'énergie entre deux instants t et $t+\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{dH} = \mathrm{H}(t+\mathrm{d}t) - \mathrm{H}(t) = 0$$

puisque l'on est en régime permanent. Appliquons le premier principe de la thermodynamique à ce système fermé ; en l'absence de travail reçu et de tout autre forme de transfert thermique que la conduction, on a

$$\mathrm{dH} = \mathscr{P}_{\mathrm{th}}(r)\,\mathrm{d}t - \mathscr{P}_{\mathrm{th}}(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}_{\mathrm{th}}}{\mathrm{d}r} = 0$$

et donc

$$\boxed{\text{La puissance thermique } \mathscr{P}_{\mathrm{th}} \text{ est indépendante de } r.}$$

L'enthalpie est la fonction d'état adaptée puisque l'on travaille sous la pression (constante) atmosphérique. En pratique, puisque l'on a un système indéformable, les fonctions énergie interne et enthalpie sont identiques.