X Maths PC 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tristan Poullaouec (Professeur agrégé) ; il a été relu par Jérôme Gärtner (ENS Cachan) et Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE).

Ce sujet traite de la répartition modulo 1 de suites de nombres réels par le biais de problèmes de sommation et d'intégrabilité, agrémentés d'un zeste d'algèbre linéaire.

Il est constitué de trois parties pouvant être abordées indépendamment les unes des autres ; cependant, il est nécessaire d'avoir traité la question 1 avant de pouvoir répondre à la question 9.

- Dans la première partie, on étudie une matrice carrée d'ordre trois à coefficients entiers. Elle s'avère diagonalisable et l'on s'intéresse alors à ses valeurs propres, ainsi qu'à la parité de la suite des traces de ses puissances successives. Il n'y a dans cette partie aucune réelle difficulté avant la question 4.c.
- Dans la deuxième partie, on fixe d'abord deux réels α et β tels que $1 \leqslant \alpha < \beta$, puis on étudie le comportement asymptotique de la suite de terme général
$$\mathcal{I}_n = \int_\alpha^\beta \cos(2\pi x^n)\,\mathrm{d}x$$
Ceci permet de prouver par l'absurde que la suite de fonctions $\varphi_n : x \mapsto \varphi(x^n)$ ne converge pas simplement vers 0 sur l'intervalle $[\,\alpha\,;\beta\,]$, où φ désigne la fonction 1-périodique coïncidant avec la valeur absolue sur l'intervalle $]-1/2\,;1/2\,]$.
- Enfin, dans la troisième partie, on étudie la série de Fourier de la fonction φ de la partie précédente et l'on établit un équivalent de la série numérique $\sum\varphi(n\lambda)$ pour tout $\lambda \notin \mathbb{Q}$. Comme toute étude de série de Fourier qui se respecte, cette partie nous gratifie de quelques questions calculatoires, combinant joyeusement divers découpages et autres majorations de sommes. On notera que le lien avec la partie I est tout à fait artificiel et que la question 9 eût été plus à sa place dans cette dernière partie.

C'est un sujet plutôt facile et rapide à traiter. Il fait appel à peu de « gros » résultats et nécessite essentiellement des manipulations élémentaires et très classiques. Par contre, l'énoncé ne fournit aucun résultat intermédiaire, ce qui risque de bloquer le candidat qui « sèche » sur une question. Mais, vu le niveau de difficulté, ceci ne devrait pas gêner outre mesure un candidat correctement préparé.

Indications

Première partie

1 Étudier les variations du polynôme caractéristique de la matrice M.

2 Utiliser les relations entre les coefficients et les racines de ce polynôme.

3.a Considérer les images du premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par ces matrices.

4.a Déduire du résultat de la question précédente la relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4.b Deviner la période en observant les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4.c Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, calculer $w_{7\mathrm{N}+6}$ en regroupant les termes sept par sept.

5.a Justifier d'abord que la matrice M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

5.b Utiliser l'inégalité des accroissements finis, puis l'inégalité triangulaire, afin de majorer $|\cos(\pi\lambda^n) - \cos(\pi u_n)|$ pour $n \in \mathbb{N}$ puis $|y_k - w_k|$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Deuxième partie

6.a Commencer par montrer que $\cos(2\pi x) = \cos(2\pi\varphi(x))$ pour tout réel x. Ensuite, faire usage du théorème de convergence dominée.

6.b Poser $u = x^n$. Abaisser, à l'aide de l'intégration par parties, le degré de la puissance de u sous le signe intégral. Conclure avec le théorème des gendarmes.

Troisième partie

8 Pour tout réel x et pour tout entier $n > p$, majorer $|\mathrm{S}_n(\varphi)(x) - \mathrm{S}_p(\varphi)(x)|$ à l'aide du résultat de la question 7.b. Passer ensuite à la limite pour conclure.

9 À l'aide de la définition de λ (cf. question 1), prouver que b^2 divise a^3, où a et b sont les nombres introduits par l'énoncé.

11 Écrire
$$\varphi(n\lambda) - \frac{1}{4} = \Big(\varphi(n\lambda) - \mathrm{S}_p(\varphi)(n\lambda)\Big) + \Big(\mathrm{S}_p(\varphi)(n\lambda) - \frac{1}{4}\Big)$$

Utiliser la question 8 pour majorer la première partie des termes, et les questions 7.b et 10 pour le reste des termes.

12 Appliquer le résultat de la question 11 et la définition de la limite ; on choisira d'abord p suffisamment grand, puis N.

I. Première partie

1 Le polynôme caractéristique de la matrice M est

$$\mathrm{P} = \det(\mathrm{XI} - \mathrm{M}) = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & 0 & 1 \\ 0 & \mathrm{X}-1 & -1 \\ -1 & -1 & \mathrm{X}+1 \end{vmatrix}$$

En développant ce déterminant selon la première ligne, on obtient alors

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \mathrm{X} \begin{vmatrix} \mathrm{X}-1 & -1 \\ -1 & \mathrm{X}+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{X}-1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \mathrm{X}\,[(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1) - 1] + \mathrm{X} - 1 \\ \mathrm{P} &= \mathrm{X}^3 - \mathrm{X} - 1 \end{aligned}$$

Étudions maintenant les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction polynomiale $\mathrm{P} : x \mapsto x^3 - x - 1$. Elle admet pour dérivée la fonction $\mathrm{P}' : x \mapsto 3x^2 - 1 = \left(x\sqrt{3}+1\right)\left(x\sqrt{3}-1\right)$, qui est négative sur $\left[-1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}\right]$ et positive en dehors. Enfin, elle a les mêmes limites que la fonction $x \mapsto x^3$ en $-\infty$ et $+\infty$, si bien que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{P}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{P}(x) = +\infty$. Voici son tableau de variations :

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		$+\infty$
$\mathrm{P}'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\mathrm{P}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\mathrm{P}\left(-1/\sqrt{3}\right)$	$\searrow$	$\mathrm{P}\left(1/\sqrt{3}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus $$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{2}{3\sqrt{3}} - 1 < 0$$

On peut donc déjà affirmer que $\mathrm{P}(x) < 0$ pour tout $x \in \left]-\infty\,; 1/\sqrt{3}\right]$. Par ailleurs, sur l'intervalle $\left]\,1/\sqrt{3}\,; +\infty\,\right[$:

- la fonction P est dérivable donc continue ;
- la fonction P est strictement croissante ;
- $\mathrm{P}\left(1/\sqrt{3}\right) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{P}(x) = +\infty$.

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique $\lambda \in \left]\,1/\sqrt{3}\,; +\infty\,\right[$ tel que $\mathrm{P}(\lambda) = 0$. C'est donc la seule racine réelle de P, si bien que

$$\boxed{\text{La matrice M possède une unique valeur propre réelle } \lambda.}$$

Enfin, $\mathrm{P}(1) = 1 - 1 - 1 = -1$ et $\mathrm{P}(2) = 8 - 2 - 1 = 5$, soit $\mathrm{P}(1) < \mathrm{P}(\lambda) < \mathrm{P}(2)$. Comme $1/\sqrt{3} < 1$, on en déduit que $1 < \lambda < 2$ par stricte croissance de P sur $[\,1\,; 2\,]$. En conséquence,

$$\boxed{1 < \lambda < 2}$$

2 Le polynôme à coefficients réels P admet une seule racine réelle : comme il est de degré 3, il possède deux autres racines complexes conjuguées σ et $\overline{\sigma}$. De ce fait,

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X} - 1 = (\mathrm{X} - \lambda)(\mathrm{X} - \sigma)(\mathrm{X} - \overline{\sigma})$$

et l'on obtient en identifiant les coefficients constants

$$\boxed{\lambda\,|\sigma|^2 = 1}$$

Or, on sait que $1 < \lambda < 2$ d'où $|\sigma|^2 < \lambda\,|\sigma|^2 < 2\,|\sigma|^2$, soit $|\sigma|^2 < 1 < 2\,|\sigma|^2$ et donc

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} < |\sigma| < 1}$$

3.a Considérons un triplet de réels (α, β, γ) tel que

$$\alpha \mathrm{I} + \beta \mathrm{M} + \gamma \mathrm{M}^2 = 0 \qquad (\mathbf{1})$$

Notons i, j et k les vecteurs colonnes de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Par définition de la matrice M, on a $\mathrm{M} \cdot i = k$ et $\mathrm{M}^2 \cdot i = \mathrm{M} \cdot k = -i + j - k$. De ce fait, la multiplication à droite de chaque membre de la relation (**1**) par le vecteur i nous conduit à

$$\alpha i + \beta k + \gamma\,(-i + j - k) = 0$$

soit
$$(\alpha - \gamma)\,i + \gamma j + (\beta - \gamma)\,k = 0$$

d'où
$$\alpha - \gamma = 0 \qquad \gamma = 0 \qquad \beta - \gamma = 0$$

comme la famille (i, j, k) est libre. Ainsi $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui montre que

$$\boxed{\text{Les matrices I, M et M}^2 \text{ sont linéairement indépendantes dans } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

3.b On a
$$\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis
$$\mathrm{M}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soit
$$\boxed{\mathrm{M}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

On observe alors que
$$\boxed{\mathrm{M}^3 = \mathrm{M} + \mathrm{I}}$$

> Ce résultat est en fait une conséquence du théorème de Cayley-Hamilton, qui stipule que $\mathrm{P(M)} = 0$ pour toute matrice carrée M de polynôme caractéristique P.

3.c Soit $n \in \mathbb{N}$: alors $\mathrm{M}^{n+3} = \mathrm{M}^n \cdot \mathrm{M}^3 = \mathrm{M}^n(\mathrm{M} + \mathrm{I}) = \mathrm{M}^{n+1} + \mathrm{M}^n$. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \mathrm{M}^{n+3} = \mathrm{M}^{n+1} + \mathrm{M}^n.}$$