E3A Maths B PC 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Nicolas Weiss (Docteur en mathématiques) ; il a été relu par Chloé Dousset (ENS Cachan) et Gilbert Monna (Professeur en CPGE).

Le sujet comporte trois exercices indépendants.

- Le premier recherche des valeurs extrémales de la fonction

$$r_f : \overrightarrow{w} \mapsto \frac{\langle f(\overrightarrow{w}), \overrightarrow{w} \rangle}{\|\overrightarrow{w}\|^2}$$

  où f est l'endomorphisme associé à une certaine matrice M, symétrique réelle d'ordre 3. Ses valeurs extrémales sont reliées aux valeurs propres extrémales de la matrice M. Les questions sont dans l'ensemble peu techniques.

- Le deuxième exercice concerne l'étude de l'équation des ondes

$$\forall (x,t) \in [\,0\,;1\,] \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

  avec données initiales et valeurs aux bords. Par l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre, on prouve qu'elle a au plus une solution, puis on construit cette unique solution dans un cas particulier à l'aide de séries de fonctions. Cet exercice est l'occasion d'utiliser les résultats du cours sur les intégrales à paramètre et les séries de fonctions.

- Le troisième exercice aborde l'étude des solutions maximales d'un système différentiel non linéaire dont on montre qu'elles sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. L'exercice est prétexte à l'utilisation des résultats du cours sur les variations de fonctions à valeurs réelles.

Si les deux premiers exercices sont classiques, le dernier peut surprendre par ses notations compliquées. L'ensemble reste cependant très proche des résultats du cours, dont le sujet permet de vérifier s'ils sont bien connus par les candidats : il s'agit d'une bonne occasion de faire le point.

Indications

Premier exercice

1.a Penser aux identités remarquables.

1.b Utiliser une partie des résultats de la question 1.a.

1.d Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A.

2.a Utiliser l'orthonormalité de la base $\mathcal{B}_0$.

2.b Comparer λ_3 à λ_1 et λ_2.

2.d Relier les fonctions r et r_f.

3.a Écrire le polynôme caractéristique de M.

3.c Calculer $\langle f(x,y,z),(x,y,z)\rangle$ pour un vecteur (x,y,z) de P.

3.d Décrire les intersections de P avec les lieux des valeurs extrémales de r_f.

Deuxième exercice

1.a Appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

1.b Utiliser le théorème de Schwarz et l'équation des ondes.

2 Appliquer avec soin la définition de la dérivation partielle en un point.

3.a La somme d'une série de fonctions continues qui converge normalement sur un intervalle est elle-même continue sur cet intervalle.

3.b Appliquer le théorème d'interversion somme-dérivation.

Troisième exercice

1.a Considérer un majorant de $|f'|$ sur I.

1.b La fonction g est monotone et bornée sur I.

2.a Utiliser (**S**) dans le calcul de u'.

2.b $u(0)$ majore les fonctions X^2 et Y^2 sur $[\,0\,;\beta\,[$.

2.c Appliquer les résultats de la question 1 aux fonctions X et Y.

3.b Utiliser la décroissance de la fonction v.

4 Refaire toute l'étude de la question 2.

Premier exercice

1.a Pour tous réels x et y, on a l'identité remarquable $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, qui implique, par positivité du carré d'un nombre réel, l'inégalité

$$2xy \leqslant x^2 + y^2$$

D'où

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

Il y a égalité si et seulement si $(x-y)^2$ est nul. Ainsi,

$$\boxed{xy = \frac{1}{2}(x^2+y^2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y}$$

De la même façon, l'identité remarquable $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ implique l'inégalité

$$-(x^2+y^2) \leqslant 2xy$$

D'où

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad -\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leqslant xy}$$

Il y a égalité si et seulement si $(x+y)^2$ est nul. Ainsi,

$$\boxed{-\frac{1}{2}(x^2+y^2) = xy \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -y}$$

1.b On vient de montrer que l'inégalité $-(x^2+y^2)/2 \leqslant xy$ est vérifiée pour tous réels x et y d'où pour tout triplet (x,y,z) de $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(0,0,0)\}$ la suite d'inégalités

$$\begin{aligned} r(x,y,z) = \frac{xy+z^2}{x^2+y^2+z^2} &\geqslant \frac{-(x^2+y^2)/2+z^2}{x^2+y^2+z^2} \\ &\geqslant \frac{-(x^2+y^2+z^2)/2}{x^2+y^2+z^2} \qquad \text{(car } z^2 \geqslant 0\text{)} \\ r(x,y,z) &\geqslant -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{-\frac{1}{2} \text{ est un minorant de la fonction } r \text{ sur } \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(0,0,0)\}.}$$

Le rapport du jury pointe le fait que bon nombre de candidats confondent les notions de minorant et de minimum. Une fonction peut très bien être bornée inférieurement (c'est-à-dire posséder un ou des minorants) sans pour autant posséder un minimum. C'est le cas par exemple de la fonction exponentielle, minorée par tout réel négatif ou nul, mais qui n'atteint jamais zéro.

Cette suite d'inégalités devient une égalité exactement quand $xy = -(x^2+y^2)/2$ et $z^2 = -z^2/2$, c'est-à-dire d'après la question précédente quand les réels x et y sont opposés et que $z = 0$. On a de ce fait pour tout réel x non nul

$$r(x,-x,0) = \frac{x(-x)+0^2}{x^2+(-x)^2+0^2} = \frac{-(x^2+(-x)^2)/2}{x^2+(-x)^2} = -\frac{1}{2}$$

La valeur minorante $-1/2$ est atteinte par la fonction r, qui admet donc un minimum.

$$\boxed{\text{Le minimum de la fonction } r \text{ est } -\frac{1}{2}.}$$

1.c On a montré à la question 1.a que l'inégalité $xy \leqslant (x^2+y^2)/2$ est vérifiée pour tous réels x et y, d'où pour tout triplet (x,y,z) de $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(0,0,0)\}$ la suite d'inégalités

$$\begin{aligned} r(x,y,z) = \frac{xy+z^2}{x^2+y^2+z^2} &\leqslant \frac{(x^2+y^2)/2+z^2}{x^2+y^2+z^2} \\ &\leqslant \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} \qquad \text{(car } x^2+y^2 \geqslant 0\text{)} \\ r(x,y,z) &\leqslant 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{1 est un majorant de la fonction } r \text{ sur } \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(0,0,0)\}.}$$

La première inégalité devient une égalité exactement quand $xy = (x^2+y^2)/2$, c'est-à-dire d'après la question 1.a quand les réels x et y sont égaux. La deuxième inégalité devient une égalité si et seulement si $(x^2+y^2)/2 = x^2+y^2$, c'est-à-dire si les réels x et y sont nuls. Soit alors un réel z différent de zéro. On calcule

$$r(0,0,z) = \frac{0\times 0+z^2}{0^2+0^2+z^2} = 1$$

La fonction r atteint la valeur majorante 1, et admet donc un maximum.

$$\boxed{\text{Le maximum de la fonction } r \text{ est } 1.}$$

1.d Désignons par I la matrice identité de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre trois à coefficients réels et déterminons le polynôme caractéristique $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ de la matrice A.

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{A}-\mathrm{XI}) = \begin{vmatrix} -\mathrm{X} & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -\mathrm{X} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mathrm{X} \end{vmatrix} = (\mathrm{X}^2-1/4)(1-\mathrm{X})$$

Les valeurs propres de A sont les racines réelles du polynôme caractéristique χ_{A}, c'est-à-dire par ordre croissant $-1/2$, $1/2$ et 1. Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Le minimum (respectivement le maximum) de la fonction } r \text{ est égal à la} \\ \text{plus petite valeur propre (respectivement à la plus grande valeur propre)} \\ \text{de la matrice A.}\end{array}}$$

> On vient de montrer que la matrice A est diagonalisable, comme toute matrice qui possède un nombre de valeurs propres distinctes égal à son ordre.

2.a La base $\mathcal{B}_0$ est orthonormée, ce qui facilite le calcul de la norme $\|\overrightarrow{w}\|$:

$$\|\overrightarrow{w}\|^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2$$

En outre, comme les vecteurs qui forment la base $\mathcal{B}_0$ sont des vecteurs propres de f,

$$\langle f(\overrightarrow{w}), \overrightarrow{w}\rangle = \lambda_1 {a_1}^2 + \lambda_2 {a_2}^2 + \lambda_3 {a_3}^2$$

Il vient par suite l'égalité

$$\begin{aligned} \langle f(\overrightarrow{w}), \overrightarrow{w}\rangle - \lambda_3 \|\overrightarrow{w}\|^2 &= {a_1}^2(\lambda_1-\lambda_3) + {a_2}^2(\lambda_2-\lambda_3) + {a_3}^2(\lambda_3-\lambda_3) \\ &= {a_1}^2(\lambda_1-\lambda_3) + {a_2}^2(\lambda_2-\lambda_3) \end{aligned}$$

qui permet de vérifier l'identité de l'énoncé

$$\boxed{\frac{\langle f(\overrightarrow{w}), \overrightarrow{w}\rangle}{\|\overrightarrow{w}\|^2} = \lambda_3 + \frac{{a_1}^2(\lambda_1-\lambda_3)}{\|\overrightarrow{w}\|^2} + \frac{{a_2}^2(\lambda_2-\lambda_3)}{\|\overrightarrow{w}\|^2}}$$