E3A Maths A PC 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thomas Chomette (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Florence Monna (ENSTA) et Guillaume Dujardin (Chercheur à l'INRIA).

Le sujet se divise en quatre parties pouvant être traitées de façon très largement indépendante. Elles ont trait à des aspects variés du programme, de l'algèbre linéaire aux séries entières, pour résoudre des questions relatives à des équations différentielles linéaires. Si la difficulté est dans l'ensemble assez raisonnable et progressive, la fin demande d'être capable de faire le lien entre des problèmes de formulation analytique et des outils d'algèbre linéaire.

- La première partie est consacrée à l'étude de l'application linéaire

$$\mathcal{A}_a\colon \begin{cases} \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \\ \quad \mathrm{P} \quad \longmapsto \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)\mathrm{P}''(\mathrm{X}) + (a\mathrm{X}-1)\mathrm{P}'(\mathrm{X}) \end{cases}$$

  où a est réel, et notamment au cas particulier $a = -4$. On s'intéresse aux valeurs propres de cet endomorphisme et à sa diagonalisation éventuelle. On y détermine également l'image et le noyau de $\mathcal{A}_a$ pour résoudre, avec $p \in [\![0\,; 3]\!]$, les équations

$$\mathcal{A}_a(\mathrm{P}) = \mathrm{X}^p$$

  Cette partie est élémentaire du point de vue des calculs mais permet de passer en revue les notions de base d'algèbre linéaire et de réduction. La fin peut être abordée dès la première année.

- La deuxième partie est plus théorique et généralise la première, puisqu'elle étudie l'application

$$\mathcal{A}_{(a,n)}\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \\ \quad \mathrm{P} \quad \longmapsto \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)\mathrm{P}''(\mathrm{X}) + (a\mathrm{X}-1)\mathrm{P}'(\mathrm{X}) \end{cases}$$

  Précisément, il s'agit de calculer ses valeurs propres. On montre que l'endomorphisme est diagonalisable lorsque a est strictement positif.

- Dans la troisième partie, on recherche les solutions développables en série entière sur $]-1\,; 1[$ de l'équation différentielle

$$x(x+1)y'' + (ax-1)y' - ay = 0$$

  Pour cela, on raisonne par analyse-synthèse en cherchant des relations de récurrence satisfaites par la suite des coefficients de la série entière, afin de pouvoir les expliciter, puis trouver le rayon de convergence de la série entière obtenue. Le lien est fait avec les deux premières parties puisque l'on recherche parmi les solutions trouvées les fonctions polynomiales, qui correspondent à des vecteurs propres de $\mathcal{A}_{(a,n)}$ associés à la valeur propre a.

- Enfin, la quatrième partie s'intéresse à l'équation différentielle

$$x(x+1)y'' + (ax-1)y' - 2(a+1)y = 0$$

  On détermine les solutions au moyen d'un changement de fonction inconnue qui ramène le problème à une équation différentielle linéaire du premier ordre, que l'on sait résoudre.

Indications

Partie I

I.1.3.a Utiliser les blocs diagonaux de la matrice M_{-4} pour montrer qu'elle n'est pas diagonalisable.

I.1.4.c Examiner les cas pour lesquels on a une valeur propre au moins double, trouvés à la question précédente.

I.1.5 Distinguer les cas particuliers trouvés précédemment, plus le cas général.

I.1.6 Examiner l'effet de $\mathcal{A}_a$ sur le terme dominant, en distinguant les cas selon le degré du polynôme.

I.2.2 Montrer que les polynômes proposés sont bien dans l'image et conclure par un argument de dimension.

I.2.3 Lorsque l'équation admet des solutions, commencer par trouver une solution particulière.

Partie II

II.3 Utiliser la matrice déterminée à la question précédente pour trouver les valeurs propres.

II.4 Lorsque $a > 0$, montrer qu'il y a $n+1$ valeurs propres distinctes.
Pour le cas $a = 0$, utiliser l'étude de la première partie.

Partie III

III.2.a Retraduire l'équation $\mathcal{D}_a(f) = af$ sous forme d'une égalité de séries entières et penser à justifier proprement l'identification des coefficients.

III.2.b Raisonner par récurrence.

III.2.c Ne pas oublier de distinguer le cas où l'on a affaire à un polynôme.

III.3 Écrire une solution à l'aide de deux paramètres réels pour trouver une base de l'ensemble des solutions.

Partie IV

IV.1 Montrer par récurrence que toute solution f est n fois dérivable en écrivant l'équation différentielle sous la forme

$$\forall x > 0, \quad f''(x) = -\frac{ax-1}{x(x+1)} f'(x) + \frac{2(a+1)}{x(x+1)} f(x)$$

IV.2 Remplacer, dans l'équation différentielle (E), $\varphi(x), \varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ par leurs expressions en fonction de $\psi(x), \psi'(x)$ et $\psi''(x)$.

IV.3 Pour primitiver $x \longmapsto \big((4+a)x+3\big)/x(x+1)$, décomposer en éléments simples.

IV.4.a Calculer ψ puis φ.

I. Étude de l'application

$$\mathcal{A}_a : \begin{cases} \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \\ \quad \mathrm{P} \quad \longmapsto \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)\mathrm{P}''(\mathrm{X}) + (a\mathrm{X}-1)\mathrm{P}'(\mathrm{X}) \end{cases}$$

I.1.1 Commençons par établir que $\mathcal{A}_a$ est bien à valeur dans $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$. En dérivant, $\deg \mathrm{P}'(\mathrm{X}) \leqslant 2$ donc $\deg(a\mathrm{X}-1)\mathrm{P}'(\mathrm{X}) \leqslant 3$, puis $\deg \mathrm{P}''(\mathrm{X}) \leqslant 1$ donc $\deg \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)\mathrm{P}''(\mathrm{X}) \leqslant 3$. Effectuant la somme, on a bien $\deg \mathcal{A}_a(\mathrm{P}) \leqslant 3$, c'est-à-dire que $\mathcal{A}_a(\mathrm{P})$ appartient à $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$. Reste à établir la linéarité de $\mathcal{A}_a$. Soient $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_a(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q}) &= \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q})''(\mathrm{X}) + (a\mathrm{X}-1)(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q})'(\mathrm{X}) \\ &= \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)\left(\lambda\mathrm{P}''+\mu\mathrm{Q}''\right)(\mathrm{X}) + (a\mathrm{X}-1)\left(\lambda\mathrm{P}'+\mu\mathrm{Q}'\right)(\mathrm{X}) \\ &= \lambda\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)\mathrm{P}''(\mathrm{X}) + \mu\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)\mathrm{Q}''(\mathrm{X}) \\ &\qquad + \lambda(a\mathrm{X}-1)\mathrm{P}'(\mathrm{X}) + \mu(a\mathrm{X}-1)\mathrm{Q}'(\mathrm{X}) \\ \mathcal{A}_a(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q}) &= \lambda\mathcal{A}_a(\mathrm{P}) + \mu\mathcal{A}_a(\mathrm{Q}) \end{aligned}$$

Ainsi, on a fini d'établir que

$$\boxed{\mathcal{A}_a \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_3[\mathrm{X}].}$$

> C'est une question très classique, mais qu'il convient de traiter correctement. En particulier, il ne faut surtout pas oublier de montrer la partie « endo », c'est-à-dire la stabilité de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ par l'application $\mathcal{A}_a$. Le rapport du jury précise que trop de candidats oublient de vérifier ce point.

I.1.2 Pour écrire M_a, on calcule l'image par $\mathcal{A}_a$ des vecteurs de la base canonique.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_a(1) &= 0 \\ \mathcal{A}_a(\mathrm{X}) &= a\mathrm{X}-1 \\ \mathcal{A}_a(\mathrm{X}^2) &= \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)2 + (a\mathrm{X}-1)2\mathrm{X} = (2a+2)\mathrm{X}^2 \end{aligned}$$

enfin $$\mathcal{A}_a(\mathrm{X}^3) = \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)6\mathrm{X} + (a\mathrm{X}-1)3\mathrm{X}^2 = (3a+6)\mathrm{X}^3 + 3\mathrm{X}^2$$

On obtient $$\boxed{\mathrm{M}_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a+2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3a+6 \end{pmatrix}}$$

I.1.3.a La matrice M_{-4} étant diagonale par blocs, pour qu'elle soit diagonalisable il faut que ses blocs diagonaux le soient. En effet, si la matrice M_{-4} est diagonalisable alors elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, et ce polynôme annule alors chacun des blocs diagonaux de M_{-4}.

Or, le bloc $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable : sa seule valeur propre étant -6, il serait semblable à $-6\mathrm{I}_2$ donc égal à $-6\mathrm{I}_2$, ce qui n'est pas le cas.

$$\boxed{\mathrm{M}_{-4} \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

I.1.3.b On calcule le polynôme caractéristique de M_{-4}, qui vaut

$$\det(M_{-4} - XI_4) = -X(-X-4)(-X-6)^2 = X(X+4)(X+6)^2$$

Les valeurs propres de $\mathcal{A}_{-4}$ sont ainsi 0, -4 et -6.

> La matrice étant triangulaire supérieure, les valeurs propres sont les coefficients diagonaux, que l'on peut donc obtenir sans polynôme caractéristique.

- La matrice M_{-4} est de rang 3 (ses trois dernières colonnes forment une famille libre) donc d'après le théorème du rang le sous-espace propre $E_0 = \operatorname{Ker} \mathcal{A}_{-4}$ est de dimension 1, engendré par le polynôme 1.
- $M_{-4} + 4I_4 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est également de rang 3 donc E_{-4} est de dimension 1. Et $\left(\mathcal{A}_{-4} + 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}_3[X]}\right)(1+4X) = 0$, en effet $C_1 + 4C_2 = 0$, où C_1 est la première colonne de la matrice et C_2 la seconde. Donc $E_{-4} = \operatorname{Vect}(1+4X)$.
- $M_{-4} + 6I_4 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est également de rang 3 et E_{-6} est de dimension 1. On a $\left(\mathcal{A}_{-4} + 6\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}_3[X]}\right)(X^2) = 0$ d'où $E_{-6} = \operatorname{Vect}(X^2)$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres sont } 0, -4 \text{ et } -6, \text{ et les sous-espaces propres associés } E_0 = \operatorname{Vect}(1),\ E_{-4} = \operatorname{Vect}(1+4X) \text{ et } E_{-6} = \operatorname{Vect}(X^2).}$$

> On retrouve le résultat de la question précédente. La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 3 et non 4, c'est-à-dire que M_{-4} n'est pas diagonalisable.

I.1.4.a Dans le cas général la matrice M_a, obtenue à la question I.1.2, est triangulaire supérieure. Les valeurs propres de $\mathcal{A}_a$ sont les coefficients diagonaux de M_a.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } \mathcal{A}_a \text{ sont } 0,\ a,\ 2a+2 \text{ et } 3a+6.}$$

I.1.4.b On a une valeur propre au moins double dès que deux des réels précédents sont égaux. Six égalités sont possibles, qui fournissent les valeurs $0, -1, -2, -3$ et -4.

$$\boxed{\mathcal{A}_a \text{ admet une valeur propre double si et seulement si } a \in \{-4,-3,-2,-1,0\}.}$$

> Pour savoir si ces valeurs propres sont exactement doubles ou non, il faut déterminer si elles sont triples ou non, ce qui revient à résoudre la question suivante.

I.1.4.c Précisément, lorsque a vaut 0, $\mathcal{A}_a$ a une valeur propre double et deux valeurs propres simples. De même lorsque a vaut -1, -3 ou -4. Enfin lorsque a vaut -2, on a $3a+6 = 0$ et $2a+2 = a = -2$, $\mathcal{A}_a$ a donc deux valeurs propres doubles. Dans tous les autres cas, $\mathcal{A}_a$ a quatre valeurs propres simples.

$$\boxed{\mathcal{A}_a \text{ ne peut avoir de valeur propre triple.}}$$