Centrale Maths 1 PC 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Hervé Diet (ENS Cachan) ; il a été relu par Chloé Dousset (ENS Cachan) et Paul Pichaureau (Professeur en CPGE).

Ce sujet traite de la résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Il s'agit de généraliser le résultat du programme en étudiant le cas d'une équation de degré quelconque. On trouvera d'abord une solution générale et on s'intéressera ensuite aux solutions développables en série entière.

- La première partie établit quelques résultats généraux qui seront utiles dans les parties suivantes. Il s'agit d'étudier des espaces de fonctions s'écrivant comme le produit d'un polynôme et d'une exponentielle. On calcule notamment la dimension de ces espaces à l'aide d'une application linéaire et du théorème du rang.
- La deuxième partie nous guide pour résoudre l'équation différentielle homogène. On exprime l'espace des solutions comme une somme directe d'espaces vectoriels. On établit ensuite que les solutions sont des sommes de fonctions introduites dans la première partie.
- Le troisième partie traite du cas d'un second membre de la même forme que les fonctions de la première partie. On commence par chercher une solution particulière. Puis, grâce à la partie précédente, on exprime toutes les solutions de l'équation avec second membre sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions simples.
- Dans la dernière partie, le second membre est une fonction développable en série entière sur un voisinage de 0. On montre que toutes les solutions de l'équation sont alors développables en série entière sur un voisinage de 0.

Ainsi, les trois premières parties font appel au programme d'algèbre (espaces vectoriels, applications linéaires) pour résoudre l'équation différentielle lorsque le second membre a une forme simple. La quatrième partie, elle, demande une bonne connaissance des séries entières et des résultats de convergence dominée.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Indications

Partie I

I.A Donner une base de $\mathbb{C}_{q,p}[\mathrm{X}]$ pour montrer que c'est un espace vectoriel et donner sa dimension.

I.C Utiliser le théorème du rang pour donner les dimensions.

Partie II

II.B Factoriser A par $(\mathrm{X} - r_j)^{m_j}$ et utiliser ce résultat pour factoriser $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{D}^k$.

II.C.a Montrer par un simple calcul que $\mathrm{Q} = \mathrm{P}'$.

II.C.c Dans le résultat précédent regarder le cas $k = m$.

II.D Donner une minoration de la dimension de $\mathrm{S_H}$ en utilisant la question précédente. Cette minoration est en fait une égalité.

Partie III

III.A Décomposer ψ en fonction de A, D et φ pour montrer qu'elle est bien définie.

III.B Remarquer que $\psi(\mathrm{P}) = 0$ implique $\mathrm{P}_{\langle z \rangle}$ solution de (H).

III.C En étudiant les dimensions montrer que l'inclusion précédente est une égalité et utiliser l'injectivité de ψ pour l'unicité.

Partie IV

IV.A Noter que la différence de deux solutions de (L_b) est une solution de (H).

IV.B Utiliser la question III.C et remarquer que l'expression avec les $\pi_{p,j}$ correspond à un changement de base.

IV.C Remplacer Π_p par sa valeur en fonction des $\pi_{p,j}$ dans l'équation différentielle.

IV.E.a Montrer ce résultat par récurrence.

IV.F.a Utiliser la majoration de la question IV.E.b et le rayon de convergence r pour conclure sur la convergence.

IV.F.b Trouver une majoration de $\mathrm{D}(\Pi_q(t))$ en s'inspirant de la question IV.E.b.

IV.H Utiliser l'équation différentielle pour exprimer $f^{(n)}$ comme une somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

IV.I.a Trouver un majorant de $\mathrm{D}(\Pi_q(t))$ en s'inspirant de la question IV.E.b

IV.I.b Commencer par montrer que $f_p^k(0)$ admet un majorant.

Les conseils du jury

Le rapport du jury pointe « des lacunes au niveau de la logique » et un « manque de recul » des candidats. Par exemple, « sur les séries entières, beaucoup sont obnubilés par ce qu'ils ont fait pendant l'année [et ne se soucient pas] de la question posée, ainsi l'unicité du développement en série entière est invoquée sans raison. » À la lecture du rapport, un effort doit être porté sur les techniques usuelles d'algèbre linéaire (notamment les questions de la partie I), sur les raisonnements par récurrence et sur les démonstrations de conditions nécessaires et suffisantes, d'existence et d'unicité.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Partie I

I.A Soit P un polynôme de $\mathbb{C}_{q,p}[\mathrm{X}]$. En particulier, son degré est majoré par q et il existe une famille de coefficients complexes $(a_i)_{i\in[\![0\,;\,q]\!]}$ telle que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{i=0}^{q} a_i \mathrm{X}^i$$

Le polynôme P étant divisible par X^p, on en déduit que a_i est nul si $i < p$ et on a

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{i=p}^{q} a_i \mathrm{X}^i$$

Réciproquement tout polynôme de cette forme est dans $\mathbb{C}_{q,p}[\mathrm{X}]$. Ainsi,

$$\mathbb{C}_{q,p}[\mathrm{X}] = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}^p, \ldots, \mathrm{X}^q)$$

Comme $(\mathrm{X}^p, \ldots, \mathrm{X}^q)$ est une famille libre, elle est une base de $\mathbb{C}_{q,p}[\mathrm{X}]$ et

$$\boxed{\mathbb{C}_{q,p}[\mathrm{X}] \text{ est un espace vectoriel de dimension } q - p + 1.}$$

I.B La fonction $t \mapsto e^{zt}$ et les fonctions polynomiales sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $\mathrm{P}_{\langle z\rangle}$ est définie sur I comme le produit de ces deux fonctions, elle est donc bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi_z \text{ est définie de } \mathbb{C}[\mathrm{X}] \text{ dans E.}}$$

D'après le rapport du jury, la consigne « Montrer qu'on peut définir une application... » est souvent mal comprise. Il s'agit ici de prouver que la fonction proposée est bien définie dans son ensemble de départ et à valeurs dans son ensemble d'arrivée.

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et λ un nombre complexe. Alors

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathrm{I} \quad \varphi_z(\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q})(t) &= (\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q})_{\langle z\rangle}(t)\\
&= (\lambda\mathrm{P}(t) + \mathrm{Q}(t))e^{zt}\\
&= \lambda\mathrm{P}(t)e^{zt} + \mathrm{Q}(t)e^{zt}\\
&= \lambda\mathrm{P}_{\langle z\rangle}(t) + \mathrm{Q}_{\langle z\rangle}(t)\\
\forall t \in \mathrm{I} \quad \varphi_z(\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q})(t) &= \lambda\varphi_z(\mathrm{P})(t) + \varphi_z(\mathrm{Q})(t)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\varphi_z \text{ est linéaire.}}$

Soit P un élément du noyau de φ_z. Alors $\mathrm{P}(t)e^{zt} = 0$ pour tout $t \in \mathrm{I}$. Comme e^{zt} est de module non nul pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathrm{I}$, P est nul sur I. Or un polynôme nul sur un segment est identiquement nul. Ainsi $\mathrm{Ker}\ \varphi_z = \{0\}$ et

$$\boxed{\varphi_z \text{ est injective.}}$$

I.C L'image par une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie est un espace vectoriel de dimension finie. On peut en déduire que

$$\boxed{\varphi_z(\mathbb{C}_q[\mathrm{X}]) \text{ et } \varphi_z(\mathbb{C}_{q,p}[\mathrm{X}]) \text{ sont des espaces vectoriels de dimension finie.}}$$

Comme $\dim \mathrm{Ker}\ \varphi_z = 0$, le théorème du rang appliqué à la restriction $\varphi_z\big|_{\mathbb{C}_q[\mathrm{X}]}$ donne

$$\dim \varphi(\mathbb{C}_q[\mathrm{X}]) = \dim \mathbb{C}_q[\mathrm{X}] - \dim \mathrm{Ker}\ \varphi_z = \dim \mathbb{C}_q[\mathrm{X}]$$

soit $\boxed{\dim \varphi(\mathbb{C}_q[\mathrm{X}]) = q + 1}$

et de même $\boxed{\dim \varphi(\mathbb{C}_{q,p}[\mathrm{X}]) = \dim \mathbb{C}_{q,p}[\mathrm{X}] = q - p + 1}$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Partie II

II.A Par définition de l'endomorphisme de dérivation, $\mathrm{D}(y) = y'$. De plus, pour tout entier k, $\mathrm{D}^k(y) = y^{(k)}$. Soit y une fonction définie sur I, les équivalences suivantes sont vérifiées

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Ker}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{D}^k\right) &\iff \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{D}^k\right)(y) = 0 \\ &\iff \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{D}^k(y) = 0 \\ &\iff \sum_{k=0}^{n} \alpha_k y^{(k)} = 0 \\ y \in \mathrm{Ker}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{D}^k\right) &\iff y \in \mathrm{S_H} \end{aligned}$$

Finalement
$$\boxed{\mathrm{S_H} = \mathrm{Ker}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{D}^k\right)}$$

II.B Du fait de la structure d'espace vectoriel de $\mathrm{S_H}$, il suffit de montrer que chacun des ensembles $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{D} - r_j.\,\mathrm{id}_{\,\mathrm{E}})^{m_j}$, pour $j \in [\![\, 1\,;\,p\,]\!]$, est contenu dans $\mathrm{S_H}$. Soit $j \in [\![\, 1\,;\,p\,]\!]$. On peut factoriser A par $(\mathrm{X}-r_j)^{m_j}$ puisque r_j est une racine d'ordre m_j de A et il existe un polynôme B tel que

$$\mathrm{A} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{X}^k = \mathrm{B}(\mathrm{X})(\mathrm{X} - r_j)^{m_j}$$

Les polynômes s'écrivent naturellement sous deux formes : développée ou factorisée. Il s'agit ici d'utiliser la dernière. Le jury précise dans son rapport que peu de candidats ont ce réflexe.

Les morphismes D et $\mathrm{id}_{\,\mathrm{E}}$ commutent entre eux, d'où

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{D}^k = \mathrm{A}(\mathrm{D}) = \mathrm{B}(\mathrm{D}) \circ (\mathrm{D} - r_j.\,\mathrm{id}_{\,\mathrm{E}})^{m_j}$$

Soit $f \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{D} - r_j.\,\mathrm{id}_{\,\mathrm{E}})^{m_j}$. Alors

$$\mathrm{A}(\mathrm{D})(f) = \mathrm{B}(\mathrm{D}) \circ (\mathrm{D} - r_j.\,\mathrm{id}_{\,\mathrm{E}})^{m_j}(f) = \mathrm{B}(\mathrm{D})(0) = 0$$

En utilisant la question précédente et puisque ceci est vrai pour tout j dans $[\![\, 1\,;\,p\,]\!]$, on en déduit l'inclusion

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{D} - r_j.\,\mathrm{id}_{\,\mathrm{E}})^{m_j} \subset \mathrm{Ker}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{D}^k\right)$$

Ainsi
$$\boxed{\sum_{j=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(\mathrm{D} - r_j.\,\mathrm{id}_{\,\mathrm{E}})^{m_j} \subset \mathrm{S_H}}$$

II.C.a Soient $r \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$. Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, alors

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathrm{I} \quad (\mathrm{D} - r.\,\mathrm{id}_{\,\mathrm{E}})(\mathrm{P}_{\langle r \rangle})(t) &= \mathrm{D}(\mathrm{P}_{\langle r \rangle})(t) - r\mathrm{P}(t)e^{rt} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{P}(t)e^{rt}) - r\mathrm{P}(t)e^{rt} \\ &= \mathrm{P}'(t)e^{rt} + \mathrm{P}(t)re^{rt} - r\mathrm{P}(t)e^{rt} \\ \forall t \in \mathrm{I} \quad (\mathrm{D} - r.\,\mathrm{id}_{\,\mathrm{E}})(\mathrm{P}_{\langle r \rangle})(t) &= \mathrm{P}'(t)e^{rt} \end{aligned}$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .