X Maths 2 MP 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sébastien Desreux (ENS Ulm) ; il a été relu par Guillaume Dujardin (ENS Cachan) et Paul Pichaureau (Professeur en CPGE).

Cette épreuve de combinatoire démontre quelques identités utilisant des dénombrements de surjections. Elle fait essentiellement appel aux résultats basiques du cours de sup ; aucun théorème nécessitant des hypothèses complexes n'est utilisé.

Bien que le thème central de l'épreuve soit le dénombrement des surjections, le sujet utilise peu de résultats de combinatoire. Les outils mis en œuvre sont en fait l'algèbre et l'analyse, employées astucieusement. Ceci peut paraître étonnant au premier abord, mais il s'agit d'une démarche classique : la combinatoire, comme l'arithmétique, fait appel à tous les autres domaines des mathématiques.

- La première partie traite rapidement le comptage des bijections et des injections avant de démontrer, à la question 3.a, une identité reliant nombre d'applications, nombre de surjections et combinaisons. Ce résultat s'interprète ensuite comme une relation matricielle, ce qui amène au calcul d'un déterminant.
- La deuxième partie donne d'abord une interprétation algébrique à la formule de la question 3.a, au moyen d'un endomorphisme T de $\mathbb{C}[X]$. Cela permet d'inverser la relation et fournit une première identité de comptage des surjections. On introduit ensuite une base qui généralise les combinaisons, dans laquelle les matrices de T et T^{-1} sont très simples. La partie se clôt sur une question difficile qui explicite le changement de base.
- La troisième partie a pour but de démontrer une deuxième identité de comptage des surjections. À cette fin, on développe $(x_1 + \cdots + x_n)^k$ de deux façons.
- La quatrième partie montre comment les surjections peuvent être utilisées pour des opérations sur les séries entières. Les résultats des parties III et IV sont mis en œuvre pour calculer la série de Taylor en 0 de la fonction $x \mapsto e^{e^x - 1}$.

Le sujet porte sur des parties du programme qui sont rarement exploitées et peut théoriquement être abordé dès la sup. Attention toutefois, il requiert par endroits un certain recul vis-à-vis des outils conceptuels, ce qui correspond bien aux objectifs de sélection de l'École Polytechnique. À chaque question, il faut trouver rapidement le bon argument et, pour cela, prendre le temps d'interpréter la question et de comprendre la manière dont l'énoncé veut nous guider. Il faut cependant être particulièrement attentif aux bornes des sommes et aux domaines des variables.

Enfin, il faut noter que cet énoncé présente un grand intérêt pédagogique. En effet, il est excellent pour apprendre à repérer les étapes par lesquelles l'auteur du sujet nous fait passer, deviner ce qu'il faut réutiliser, bref comment naviguer avec succès dans un sujet de concours. Usuellement, ce cheminement est parasité par des questions techniques qui préparent l'emploi d'un théorème complexe, ce qui n'est pas le cas ici. En cela, il représente une bonne préparation à tous les concours.

Indications

Première partie

1 Que dire d'une injection de $[\![1\,;\, n]\!]$ dans lui-même ?

2 Une injection $j\colon [\![1\,;\, k]\!] \to [\![1\,;\, n]\!]$ est une bijection de $[\![1\,;\, k]\!]$ dans $j([\![1\,;\, k]\!])$.

3.a Regrouper les applications selon le cardinal q de leur image.

3.b Remarquer que $\mathrm{A}(r) = \mathrm{S}(r) \times \mathrm{P}(r)$ (attention aux bornes de la somme) et que les matrices $\mathrm{P}(r)$ et $\mathrm{S}(r)$ sont triangulaires.

Deuxième partie

4.a $\mathrm{T}(\mathrm{X}^n)$ correspond au n-ième vecteur colonne de la matrice de T.

4.b Exprimer T^{-1} à l'aide de $\mathrm{P}(\mathrm{X}-1)$.

4.c Multiplier le vecteur $(b_0, \ldots, b_d)$ par la matrice de T (qui est inversible).

4.d Appliquer le résultat de la question 4.c à l'identité de la question 3.a.

5 Examiner les degrés des polynômes de la famille.

6 Exprimer le membre de droite en fonction de X et factoriser.

7.a La question 6 a fourni une relation de récurrence, qui permet d'exprimer $\mathrm{T}(\mathrm{N}_k)$ dans la base $(\mathrm{N}_0, \ldots, \mathrm{N}_d)$.

7.b $\mathrm{N}_k = \mathrm{T}(\mathrm{N}_k - \mathrm{N}_{k-1})$.

8 Deux polynômes de degré d qui coïncident en $d+1$ points sont égaux.

Troisième partie

9 Utiliser l'hypothèse de récurrence sur l'expression $x_1 + \cdots + x_{n-1} + (x_n + x_{n+1})$.

10 On doit choisir un x_i parmi n, k fois de suite.

11 Les membres de droite des questions 9 et 10 sont des polynômes en x_1 dont les termes constants sont égaux.

Quatrième partie

12 Partir de la série dont la somme est $[\varphi(x)]^n$.

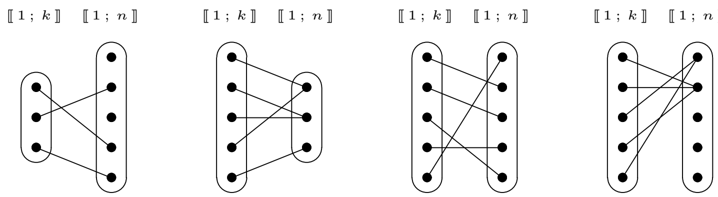
13 Partir de la série dont la somme est $\psi(\varphi(x))$ quand $|\varphi(x)| < \mathrm{R}_2$.

14 Application directe de la question précédente.

Première partie

1 Lorsque les ensembles de départ et d'arrivée d'une application f sont tous deux finis et de même cardinal, il est équivalent d'affirmer que f est injective, surjective ou bijective. Or, une bijection de $[\![1\,;\, n]\!]$ dans lui-même est une permutation, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad j_{n,n} = s_{n,n} = n\,!}$$

> Rappelons qu'une idée intuitive des injections, surjections, bijections et applications peut se représenter à l'aide de graphes bien connus :
>
> 
>
>
> injection surjection bijection application

2 Notons j une injection de $[\![1\,;\, k]\!]$ dans $[\![1\,;\, n]\!]$ (avec $k \leqslant n$). L'image de j est l'un quelconque des sous-ensembles de $[\![1\,;\, n]\!]$ possédant k éléments, que l'on peut choisir de $\dbinom{n}{k}$ façons. L'image de j étant fixée, j est une injection de $[\![1\,;\, k]\!]$ vers un ensemble à k éléments, c'est donc une bijection : il y a par conséquent $k\,!$ injections de $[\![1\,;\, k]\!]$ dans $[\![1\,;\, n]\!]$ qui ont pour image $\mathrm{Im}\,(j)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \leqslant n \qquad j_{k,n} = \binom{n}{k}\,k\,!}$$

> On constate qu'il est aisé de dénombrer les injections. La suite du problème se concentre sur les surjections.

3.a Notons $\mathscr{A}$ l'ensemble des applications de $[\![1\,;\, k]\!]$ dans $[\![1\,;\, n]\!]$ (avec k et $n > 0$). Regroupons dans un ensemble $\mathscr{A}_q$ les éléments de $\mathscr{A}$ dont l'image a pour cardinal q. Ce dernier vaut au moins 1 (l'image de l'application ne peut pas être vide), et au plus n.

$$\mathscr{A} = \bigcup_{q=1}^{n} \mathscr{A}_q$$

Supposons maintenant q fixé, $q \in [\![1\,;\, n]\!]$, et déterminons le cardinal de $\mathscr{A}_q$.

- Il y a $p_{q,n}$ façons de choisir q éléments parmi n par définition des $p_{q,n}$.
- Un sous-ensemble S_q de $[\![1\,;\, n]\!]$ possédant q éléments étant choisi, les applications de $\mathscr{A}_q$ ayant pour image exactement S_q sont des surjections de $[\![1\,;\, k]\!]$ dans S_q ; il y en a $s_{k,q}$.
- Le nombre d'applications appartenant à $\mathscr{A}_q$ est donc

$$\forall q \in [\![1\,;\, n]\!] \quad \mathrm{Card}\ \mathscr{A}_q = s_{k,q} \times p_{q,n}$$

Comme les $\mathscr{A}_q$ sont deux à deux disjoints,

$$\text{Card } \mathscr{A} = \sum_{q=1}^{n} \text{Card } \mathscr{A}_q = \sum_{q=1}^{n} s_{k,q} \times p_{q,n}$$

Par ailleurs, $\mathscr{A}$ possède n^k éléments car chacun des k éléments de l'ensemble de départ peut prendre l'une quelconque des n images possibles. Il vient :

$$\boxed{\forall k, n \in \mathbb{N}^* \quad n^k = \sum_{q=1}^{n} s_{k,q}\, p_{q,n}}$$

> La technique utilisée ci-dessus s'appelle le double comptage : elle consiste à compter de deux manières le nombre d'éléments d'un ensemble. Cette idée est fréquemment utilisée pour établir des identités combinatoires.

3.b Pour $r > 0$ fixé, calculons le terme général du produit $\mathrm{Q}(r) = \mathrm{S}(r) \times \mathrm{P}(r)$:

$$\forall (k, n) \in [\![1\,; r]\!]^2 \quad \mathrm{Q}(r)_{k,n} = \sum_{q=1}^{r} s_{k,q} \times p_{q,n}$$

Vu les conventions de notation adoptées, n est toujours plus petit que r. Or d'après le préambule, $p_{q,n} = 0$ dès que $q > n$, d'où

$$\forall (k, n) \in [\![1\,; r]\!]^2 \quad \mathrm{Q}(r)_{k,n} = \sum_{q=1}^{n} s_{k,q} \times p_{q,n}$$

D'après la question 3.a, ceci signifie que

$$\mathrm{A}(r) = \mathrm{S}(r) \times \mathrm{P}(r)$$

> Il est pratique à cette étape de noter, au brouillon, l'allure générale des matrices $\mathrm{S}(r)$ et $\mathrm{P}(r)$:
>
> $$\mathrm{S}(r) = \begin{array}{c} 1 \xleftrightarrow{\quad n \quad} r \\ \begin{pmatrix} 1! & & & \\ & 2! & 0 & \\ & * & \ddots & \\ & & & r\,! \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \updownarrow k \\ r \end{array} \qquad \mathrm{P}(r) = \begin{array}{c} 1 \xleftrightarrow{\quad n \quad} r \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & * & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \updownarrow k \\ r \end{array}$$

Or, la matrice $\mathrm{S}(r)$ est triangulaire inférieure puisque $s_{k,n} = 0$ dès que $k < n$; de même, $\mathrm{P}(r)$ est triangulaire supérieure puisque $p_{k,n} = 0$ dès que $k > n$. Leurs déterminants sont donc les produits de leurs termes diagonaux. Comme $p_{n,n} = \dbinom{n}{n} = 1$ pour tout $n \in [\![1\,; r]\!]$, $\det \mathrm{P}(r) = 1$. De plus, d'après la question 1, $s_{n,n} = n\,!$ pour tout $n \in [\![1\,; r]\!]$ donc $\det \mathrm{S}(r) = \prod\limits_{q=1}^{r} q\,!$. Il vient

$$\boxed{\det \mathrm{A}(r) = \det \mathrm{S}(r) \times \det \mathrm{P}(r) = \prod_{q=1}^{r} q\,!}$$

> Le calcul pouvait aussi être mené à la main en faisant apparaître une matrice de Vandermonde.
>
> $$\mathrm{A}(r) = \begin{pmatrix} 1^1 & 2^1 & 3^1 & \cdots & r^1 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1^r & 2^r & 3^r & \cdots & r^r \end{pmatrix}$$