X Maths 1 MP 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jérôme Gärtner (ENS Cachan) ; il a été relu par Mehdi Tibouchi (Professeur en CPGE) et Jean Starynkévitch (Professeur en CPGE).

Ce sujet traite du problème de Sturm-Liouville : on étudie un problème différentiel avec conditions aux limites, d'inconnues $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, de la forme

$$\begin{cases} (uy')' + vy = \lambda y \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

où u et v sont des fonctions données, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$. Les réels λ pour lesquels il existe une fonction y non nulle telle que (y, λ) est solution s'appellent les *valeurs propres* de l'équation. L'étude s'avère être très différente d'un problème de Cauchy classique.

Le sujet comporte quatre parties fortement liées.

- Le but de la première partie est d'établir un résultat d'entrelacement des zéros de deux solutions de problèmes de Sturm-Liouville comparables (question 4). Sur beaucoup de points, elle reste proche du cours, en utilisant le théorème de Cauchy pour les équations linéaires (question 1), le wronskien (question 2) et des manipulations pour montrer une équivalence entre deux équations différentielles (question 4).
- La deuxième partie, assez courte, est celle qui demande le moins de calculs. On y démontre que les « sous-espaces propres » associés aux valeurs propres de l'équation sont des droites vectorielles (question 5) orthogonales (question 6).
- La troisième partie étudie la répartition des zéros des fonctions associées à des valeurs propres. Elle commence (question 7) par un exemple explicite, familier et facile – l'équation à coefficients constants $y'' = \lambda y$ – avant de rentrer dans le vif du sujet avec l'une des questions les plus difficiles du problème (question 8).
- La dernière partie précise la répartition des valeurs propres (question 12) et des zéros des fonctions associées (question 13).

Dans son ensemble, ce sujet peut être considéré comme très difficile, en particulier les questions 8, 9, 12 et 13, y compris pour le concours de l'X, tout en ne dépassant que rarement (questions 1 et 8.b) le programme de première année. Il permet aux élèves ambitieux de s'exercer à de nombreux types de raisonnements délicats en analyse.

Indications

1.a Penser à utiliser le théorème de Cauchy linéaire.

1.b Utiliser la propriété de compacité des segments de $\mathbb{R}$.

2.a Raisonner par l'absurde, et utiliser la question 1.a en un point adhérent de l'ensemble des valeurs d'annulation de y.

2.b Remarquer que le rôle des deux solutions est symétrique dans la question 2.a.

3.b La question se prête à un raisonnement par analyse et synthèse. L'idée directrice est d'utiliser la question 3.a, et de ne pas oublier que pour prouver une égalité de sous-espaces vectoriels, il suffit de montrer une inclusion et l'égalité des dimensions.

4.a Suivre l'indication donnée par l'énoncé et intégrer par parties.

4.b Cette question présente beaucoup d'analogies avec la question 2.a. Raisonner de la même manière par l'absurde en utilisant la question 4.a, qui fournit un outil analogue au wronskien de la question 2.

5.a Pour bien aborder cette question, il faut connaître la dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire. Utiliser une fonction introduite dans l'énoncé, ou bien le théorème de Cauchy linéaire.

5.b On utilisera dans cette question le résultat de la question 5.a.

6.b Appliquer l'égalité obtenue à la question 4.a.

8.a Pour cette question technique, il est conseillé de faire un dessin, et de chercher à construire les points demandés autour des zéros de y_{λ_0}. Attention au fait que l'on a besoin d'inégalités strictes.

8.b La propriété demandée est très proche de l'uniforme continuité.

8.c. Les questions 8.a et 8.b permettent de contrôler le comportement de y_λ. Il ne faut pas oublier qu'une fonction continue strictement monotone est une bijection sur son image.

9. Suivre l'indication donnée par l'énoncé en prenant garde au fait que μ ne satisfait pas toujours les conditions des questions 4.b et 7.b, mais dans ce cas, l'inégalité est triviale.

10.a Utiliser la question 8.c et le fait qu'une fonction localement constante sur un espace connexe par arcs est constante.

10.b Raisonner par l'absurde, en utilisant les questions 9 et 10.a pour montrer que l'ensemble des valeurs propres n'est pas majoré.

11 Pour (iii), chercher une combinaison linéaire de (i) et (ii). Intégrer en x et faire deux intégrations par parties pour obtenir (iv).

12 Utiliser la question 4.b pour établir la croissance de $\lambda \mapsto \mathrm{N}(\lambda)$. Puis rendre utilisable et utiliser la question 8 (prendre garde au fait qu'ici, $y_{\lambda_0}(1) = 0$) sur un segment de la forme $[0, 1-\eta]$, où $\eta > 0$ est choisi arbitrairement petit. Enfin, montrer que, pour $\eta > 0$ petit et $\lambda > \lambda_0$ proche de λ_0, y_{λ_0} est monotone sur $[1-\eta, 1]$, donc s'annule au plus une fois. Conclure.

13 Regrouper les résultats des questions 6.a et 12, sans oublier la conséquence de l'équation (iv) de la question 11, déjà utilisée à la question 12.

Première partie

1.a L'équation $(\mathrm{D}_{p,q})$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, homogène, dont le coefficient devant y'' ne s'annule pas. Soit $t_0 \in [0,1]$ quelconque. La fonction nulle est solution du problème de Cauchy suivant sur $[0,1]$:

$$\begin{cases} y'' + py' + qy &= 0 \\ y(t_0) &= 0 \\ y'(t_0) &= 0 \end{cases}$$

Or, le théorème de Cauchy linéaire affirme que ce problème admet une unique solution. On en déduit que si y est solution une de l'équation $(\mathrm{D}_{p,q})$ telle que y et y' s'annulent en t_0, alors y est la fonction nulle. Comme le choix de t_0 est quelconque, il vient, par contraposition :

$$\boxed{\text{Si } y \text{ est une solution non identiquement nulle de } (\mathrm{D}_{p,q}),\text{ alors } y \text{ et } y' \text{ ne s'annulent pas simultanément.}}$$

> Cette question, très proche du cours, permet de vérifier que l'on sait appliquer le théorème de Cauchy linéaire, qui est un théorème très important du programme sur les équations différentielles linéaires.

1.b Montrons par l'absurde que les zéros de y sont en nombre fini.

Supposons que y ait un nombre infini de zéros dans $[0,1]$. Il existe alors une suite injective de réels $(t_n)_n$ tous zéros de y. La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est est à valeurs dans le compact $[0,1]$ donc admet une valeur d'adhérence. Il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $a \in [0,1]$ tels que $t_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$; la suite $(t_n)_n$ étant par ailleurs injective, au plus un seul de ses termes vaut a et, quitte à le retirer, on peut supposer que $t_{\varphi(n)} \neq a$ pour tout n. Dans ce cas, $y(t_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} y(a)$ par continuité, et $y(t_{\varphi(n)})$ est la suite nulle par hypothèse. Donc a est un zéro de y. De même on a

$$y'(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{y(t_{\varphi(n)}) - y(a)}{t_{\varphi(n)} - a} = 0$$

On déduit de la question 1.a que y est la solution nulle, ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Les zéros de } y \text{ sont en nombre fini.}}$$

> En général, on peut montrer que les zéros de solutions non nulles d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sont isolés (ce qui permet de conclure ici car il n'y a qu'un nombre fini de points isolés dans un compact). Rappelons rapidement le raisonnement :
>
> Soit $t_0 \in [0,1]$ tel que $y(t_0) = 0$. D'après la question 1.a, $y'(t_0) \neq 0$. Supposons par exemple $y'(t_0) > 0$. La continuité de y' donne l'existence d'un intervalle V de $[0,1]$ contenant t_0 tel que $y' > 0$ sur V. On en déduit que y est une fonction strictement croissante sur V, donc injective sur V. Comme y s'annule en t_0, elle ne s'annule pas en un autre point de V. En traitant de même le cas où $y'(t_0) < 0$, on en déduit que les zéros de y sont isolés et y est strictement monotone au voisinage de ses zéros, ce qui sera très utile pour la suite du sujet.

2.a Soit $\mathrm{W} = y_1 y_2' - y_1' y_2$ le wronskien de y_1 et y_2. On sait d'après le cours que la fonction W est continue et ne s'annule pas sur $[0,1]$, donc est de signe constant.

Par hypothèse, y_1 ne s'annule pas sur $]a,b[$. Comme cette fonction est continue, elle garde un signe constant. Supposons par exemple que $y_1 > 0$ sur $]a,b[$. Comme y_1 s'annule en a et b, on a, pour $0 < h < b-a$,

$$\frac{y_1(a+h) - y_1(a)}{h} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \frac{y_1(b) - y_1(b-h)}{h} \leqslant 0$$

Ainsi, lorsque h tend vers 0 par valeurs supérieures on obtient $y_1'(a) \geqslant 0$ et $y_1'(b) \leqslant 0$. Ceci permet d'affirmer, d'après le résultat de la question 1.a que $y_1'(a) > 0$ et $y_1'(b) < 0$. On a

$$\mathrm{W}(a) = -y_1'(a) y_2(a) \quad \text{et} \quad \mathrm{W}(b) = -y_1'(b) y_2(b)$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que y_2 ne s'annule pas sur $]a,b[$. Comme c'est une fonction continue, on peut supposer par exemple que $y_2 > 0$ sur $]a,b[$. Alors

$$\mathrm{W}(a) < 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{W}(b) > 0$$

ce qui contredit les propriétés du wronskien rappelées ci-dessus. Finalement

$$\boxed{y_2 \text{ s'annule dans }]a,b[.}$$

> Le wronskien est un outil du programme très utile pour l'étude des équations différentielles linéaires. Rappelons qu'en général, toute équation d'ordre p peut être vu comme système à p équations d'ordre 1. Le wronskien est alors défini comme le déterminant d'une famille de solutions pour le système d'ordre 1 associé à l'équation considérée. Lorsque cette famille est une base, il ne s'annule pas.

2.b Supposons que la fonction y_2 ait deux zéros α, β dans $]a,b[$. On peut inverser les rôles de y_1 et de y_2 dans le raisonnement de la question 2.a pour conclure que y_1 s'annule sur $]\alpha,\beta[\subset]a,b[$, ce qui est impossible par définition de a et b qui sont deux zéros consécutifs de y_1.

$$\boxed{y_2 \text{ a exactement un zéro sur }]a,b[.}$$

3.a Remplaçons $\mathrm{B}_{u,v}(y_1)$ et $\mathrm{B}_{u,v}(y_2)$ par leurs expressions en fonction de y_1 et y_2.

Il vient
$$\begin{aligned} y_1 \mathrm{B}_{u,v}(y_2) - y_2 \mathrm{B}_{u,v}(y_1) &= y_1\left[(u y_2')' + v y_2\right] - y_2\left[(u y_1')' + v y_1\right] \\ &= y_1 u y_2'' + y_1 u' y_2' - y_2 u y_1'' - y_2 u' y_1' \end{aligned}$$

Par hypothèse, y_1 et y_2 sont solutions de $(\mathrm{D}_{p,q})$, c'est-à-dire

$$y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0 \quad \text{et} \quad y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} y_1 \mathrm{B}_{u,v}(y_2) - y_2 \mathrm{B}_{u,v}(y_1) &= y_1 u\left[-p y_2' - q y_2\right] + y_1 u' y_2' - y_2 u\left[-p y_1' - q y_1\right] - y_2 u' y_1' \\ &= u'(y_1 y_2' - y_2 y_1') - up(y_1 y_2' - y_2 y_1') - q y_1 y_2 u + q y_1 y_2 u \end{aligned}$$

d'où
$$\boxed{y_1 \mathrm{B}_{u,v}(y_2) - y_2 \mathrm{B}_{u,v}(y_1) = (u' - up)\mathrm{W}}$$