Centrale Maths 2 MP 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Chloé Dousset (ENS Cachan) ; il a été relu par Serge Bouju (Professeur en CPGE) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

L'objet de ce problème est de prouver que sous certaines conditions, une matrice A peut être décomposée sous la forme $A = LU$ avec L triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure. C'est la « factorisation LU », dont le nom provient de l'anglais *Lower* (inférieur) et *Upper* (supérieur).

L'épreuve est divisée en trois parties. Les deux premières sont reliées, la deuxième utilisant les résultats de la première dans un cas particulier. La troisième partie est indépendante.

- Dans la première partie, l'objectif est de prouver que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable et d'expliciter le procédé de factorisation LU permettant d'obtenir cette trigonalisation.
- Dans la deuxième partie, on applique les résultats précédents au cas particulier d'une matrice tridiagonale. On explicite d'abord la factorisation LU dans ce cas puis on l'utilise sur un exemple pour inverser une matrice.
- Dans la dernière partie, on cherche à résoudre l'équation d'inconnue u dans $\mathbb{R}^n$,
$$u = \mathrm{H}u + c$$
où c est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et H une matrice, par une méthode itérative dont il faut montrer la convergence et trouver la vitesse par des calculs d'équivalents. Notons que la question III.A.3 est très classique. Elle était déjà présente dans la troisième partie du sujet de Mathématiques 2 de l'École Polytechnique en 2005.

Cette épreuve comporte plusieurs spécificités :

- Conformément à l'évolution souhaitée par le jury du concours Centrale-Supélec, elle comporte beaucoup de questions sur le programme d'informatique (tronc commun), demandant notamment d'écrire des algorithmes et de calculer le nombre d'opérations effectuées.
- Elle ne comporte pas de géométrie, contredisant ainsi la notice officielle du concours qui stipule que « l'une des deux épreuves comporte de la géométrie ou de la géométrie différentielle ».

Enfin, ce sujet permet de s'exercer au calcul matriciel. En particulier, un grand nombre de questions nécessitent le calcul formel du produit de deux matrices.

Indications

I. Méthode de Gauss et factorisation

I.A.1 Écrire le système, partir de la dernière ligne puis remonter ligne par ligne.

I.B.1 Écrire les coefficients de la ligne $\mathrm{L}_q\,(\mathrm{P})$ et faire apparaître les lignes de A.

I.B.2.a Soit on explicite $\mathrm{F}\,(k,\beta)$, soit on étudie l'action de $\mathrm{F}\,(k,\beta)\,\mathrm{F}\,(k,-\beta)$.

I.B.2.b Le déterminant d'une matrice est inchangé lorsque l'on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.

I.B.2.c Expliciter $\mathrm{F}\,(k,\beta)$.

I.B.3.b Montrer par récurrence la propriété

$$\mathcal{H}(q):\quad \forall j \in [\![\, q+1\,;\, n\,]\!] \quad \mathrm{C}_j^q = e_j \qquad \text{et} \qquad \forall j \in [\![\, 1\,;\, q\,]\!] \quad \mathrm{C}_j^q = b_j$$

pour tout $q \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!]$

I.C.1-2 On demande ici d'expliciter la méthode du pivot de Gauss.

I.C.3.a Reprendre les questions précédentes et utiliser la stabilité de $\mathcal{TI}_n$ par multiplication.

I.C.3.b Calculer $\mathrm{F}\,(k,\beta_k)\,\mathrm{F}\,(k+1,\beta_{k+1})$.

I.C.4 Regrouper les matrices triangulaires supérieures d'un côté et les matrices triangulaires inférieures à diagonale unité de l'autre, puis utiliser le fait que $\mathcal{TI}_n \cap \mathcal{TS}_n = \{\mathrm{I}_n\}$.

II. Applications et cas particuliers

II.A.2 Résoudre le système $\mathrm{A}u = w$ avec $w = e_j$.

II.B.1 Développer le déterminant suivant la dernière ligne.

II.B.2 Multiplier les deux matrices fournies par l'énoncé puis utiliser l'unicité pour conclure.

II.C.1.a Ce simple calcul est beaucoup plus élégant si on introduit $v_0 = v_{n+1} = 0$.

II.C.1.b Prouver que $\langle \mathrm{A}_n v, v\rangle \geqslant 0$ pour tout vecteur v et que ce produit scalaire est nul si et seulement si le vecteur v est nul.

II.C.2 Introduire le polynôme associé à la récurrence linéaire d'ordre deux.

II.C.3.b Raisonner par récurrence sur les $n-k$ dernières coordonnées de x puis sur les k premières.

II.C.4. Utiliser la question précédente ainsi que la question II.A.2.

III. Une méthode itérative

III.A.1.b Utiliser une base orthonormale de diagonalisation de B.

III.A.1.c Utiliser une base orthonormale de diagonalisation de A.

III.A.2. Montrer que $\|\mathrm{U}_{k+1} - \mathrm{U}_k\| \leqslant \|\mathrm{H}\|^k \,\|\mathrm{U}_1 - \mathrm{U}_0\|$ et en déduire que la série de terme général $\mathrm{U}_{k+1} - \mathrm{U}_k$ converge.

III.A.3.a Introduire le polynôme associé à la relation de récurrence et utiliser le fait que $x_0 = x_{n+1} = 0$.

III.A.4.a Raisonner par récurrence.

III.A.4.c Faire le lien entre les valeurs propres de ${\mathrm{A}_n}^{-1}$ et celles de A_n.

Les conseils du jury

✎ Le rapport du jury souligne que la première partie du sujet, « bien que très proche du cours et ne présentant aucune difficulté particulière, a été ressentie comme trop lointaine par de nombreux candidats qui, de ce fait, l'ont délaissée pour passer rapidement aux deux suivantes ». D'autres y ont « glané l'essentiel de leurs points mais au prix de calculs laborieux ». Dans cette partie, « les algorithmes demandés ont été très souvent ignorés » alors que leur « caractère rémunérateur » n'est pas à minimiser. La deuxième partie « ne requérait que les bases du calcul matriciel » à l'exception « d'un détour par la notion de matrice définie positive, dont l'assimilation a d'ailleurs laissé aux correcteurs une impression mitigée ». La dernière partie demandait « une bonne compréhension des notions de Topologie ». De façon générale, le jury rappelle que « le programme des épreuves de Mathématiques est la *réunion* de ceux des *deux* années de classes préparatoires et que toute stratégie contraire [...] est éminemment risquée ».

I. Méthode de Gauss et factorisation

I.A.1 Le système étudié est

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}$$

Grâce à la dernière ligne, on obtient $a_{n,n}u_n = w_n$. De plus, $\det(\mathrm{A}) = \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,i} \neq 0$, ce qui implique $a_{n,n} \neq 0$ et permet d'obtenir $u_n = w_n/a_{n,n}$.

Cette question est très facile, la seule subtilité consiste à justifier que l'on peut diviser par $a_{n,n}$.

On va maintenant « remonter » le système. Pour cela, on écrit la $(n-k)^{\mathrm{e}}$ ligne

$$\sum_{j=n-k}^{n} a_{n-k,j}u_j = w_{n-k}$$

On en déduit que $\qquad a_{n-k,n-k}u_{n-k} = w_{n-k} - \sum\limits_{j=n-k+1}^{n} a_{n-k,j}u_j$

et comme précédemment, on utilise le fait que $a_{n-k,n-k} \neq 0$ pour obtenir

$$\boxed{u_{n-k} = \frac{1}{a_{n-k,n-k}}\left(w_{n-k} - \sum_{j=n-k+1}^{n} a_{n-k,j}u_j\right)}$$

L'algorithme de résolution du système est donc

$u_n := \dfrac{w_n}{a_{n,n}}$;
Pour k allant de 1 à $n-1$ **faire**
  $\mathrm{S} := \sum\limits_{j=n-k+1}^{n} a_{n-k,j} u_j$;
  $u_{n-k} := (w_{n-k} - \mathrm{S}) \times \dfrac{1}{a_{n-k,n-k}}$;

I.A.2 La première ligne du code nécessite une division et chaque itération utilise une soustraction (équivalente à une addition), une division et le calcul de $\sum\limits_{j=n-k+1}^{n} a_{n-k,j} u_j$. Cette somme est obtenue grâce à k multiplications et à $k-1$ additions. Le nombre total d'opérations nécessaires à la résolution du système est donc

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{N}_{\text{addition}} &= \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} \\ \mathrm{N}_{\text{multiplication}} &= \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} \\ \mathrm{N}_{\text{division}} &= 1 + (n-1) = n \end{aligned}}$$

I.B.1 Soit $q \in [\![1\,;\,n]\!]$. Considérons la ligne $\mathrm{L}_q(\mathrm{P}) = (p_{q,j})_{1 \leqslant j \leqslant n}$.
On a $p_{q,j} = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{q,i} a_{i,j}$ et, par conséquent

$$(p_{q,j})_{1 \leqslant j \leqslant n} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_{q,i} a_{i,j} \right)_{1 \leqslant j \leqslant n} = \sum_{i=1}^{n} m_{q,i} \, (a_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant n}$$

c'est-à-dire
$$\boxed{\mathrm{L}_q(\mathrm{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_{q,i} \mathrm{L}_i(\mathrm{A})}$$

I.B.2.a Ici, il y a deux possibilités : soit on calcule directement d'abord $\mathrm{F}(k,\beta)$ puis le produit $\mathrm{F}(k,\beta)\,\mathrm{F}(k,-\beta)$, et alors on entame sérieusement la question I.B.2.c ; soit on démontre le résultat sans se servir de la formule explicite de $\mathrm{F}(k,\beta)$.

Première méthode. On cherche des coefficients $(\varepsilon_{q,i})_{1 \leqslant q,i \leqslant n}$ tels que

$$\mathrm{L}'_q = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{q,i} \mathrm{L}_i = \begin{cases} \mathrm{L}_q & \text{si } 1 \leqslant q \leqslant k \\ \mathrm{L}_q + \beta_q \mathrm{L}_k & \text{si } k+1 \leqslant q \leqslant n \end{cases} \qquad \text{pour toute matrice A}$$

On en déduit, soit par identification, soit en prenant $\mathrm{A} = \mathrm{E}_{i,j}$, que $\varepsilon_{q,i} = \delta_{i,q}$ si $1 \leqslant i \leqslant k$, et $\varepsilon_{q,i} = \delta_{i,q} + \beta_q \delta_{i,k}$ si $k+1 \leqslant i \leqslant n$, soit

$$\boxed{\mathrm{F}(k,\beta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \beta_{k+1} & \ddots & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \beta_n & & & 1 \end{pmatrix}}$$