CCP Maths 2 MP 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julien Reygner (École Polytechnique) ; il a été relu par Nicolas Weiss (Docteur en mathématiques) et Gilbert Monna (Professeur en CPGE).

Ce sujet concerne les matrices dont les valeurs propres sont sur la diagonale, dites matrices à diagonale propre.

- Dans la première partie, on donne des exemples de telles matrices, et on les détermine complètement dans le cas de la dimension 2.
- La deuxième partie fournit une caractérisation des matrices à diagonale propre en dimension 3. On utilise ce critère pour tester plusieurs matrices données.
- La troisième partie étudie l'exemple des matrices définies par blocs.
- La quatrième partie s'intéresse à la structure de l'ensemble des matrices à diagonale propre, notamment leur lien avec les matrices trigonalisables.
- La cinquième partie détermine l'ensemble des matrices à diagonale propre symétriques et antisymétriques.
- Dans la sixième et dernière partie, on applique les résultats des parties précédentes pour donner la dimension maximale des sous-espaces vectoriels de matrices à diagonale propre.

Ce sujet plutôt court utilise les théorèmes basiques de l'algèbre linéaire. Il est d'un niveau peu élevé et permet une bonne révision des méthodes de calcul matriciel et de réduction des endomorphismes.

Indications

I. Exemples

1.a Utiliser la règle de Sarrus pour calculer le polynôme caractéristique, puis isoler le produit des trois termes diagonaux du reste du polynôme.

2 Calculer le polynôme caractéristique de A.

3 Trouver une condition nécessaire en calculant le polynôme caractéristique d'une matrice de $\mathcal{E}_2$.

II. Test dans le cas $n = 3$

4 Faire le lien entre les valeurs propres d'une matrice et son inversibilité.

6.a Utiliser la caractérisation trouvée à la question précédente.

III. Exemples de matrices par blocs

7 Vérifier que M est le produit des deux matrices données par l'indication puis calculer le déterminant de ces matrices en utilisant des développements par rapport à des lignes bien choisies.

8.a Utiliser la matrice A_5 donnée à la question 6.b.

8.b Prendre garde au fait qu'on ne peut pas choisir A et C à diagonale propre.

IV. Quelques propriétés

9 Exprimer les valeurs propres et les coefficients diagonaux de $a\mathrm{A}+b\mathrm{I}_n$ en fonction de ceux de A.

10 Utiliser la question précédente pour construire une suite d'éléments de G_n qui converge vers une matrice à diagonale propre donnée.

11.a Chercher un contre-exemple dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

12 Montrer que toute matrice est la somme de deux matrices triangulaires.

V. Matrices symétriques et matrices antisymétriques

14.a Écrire les valeurs propres de ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ en fonction de celles de A (et ne pas oublier que A est symétrique !).

15.a Écrire le polynôme caractéristique de A et appliquer le théorème de Cayley-Hamilton.

15.b Utiliser le théorème spectral.

15.c Utiliser le résultat de la question 13.

VI. Dimension maximale d'une espace vectoriel inclus dans $\mathcal{E}_n$

17 Utiliser la formule $\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G})+\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F})+\dim(\mathrm{G})$ pour F,G sous-espaces d'un espace vectoriel E.

18 Chercher les éléments de F sous forme diagonale par blocs, en s'appuyant sur les résultats de la partie III.

I. Exemples

1.a Le polynôme caractéristique $\chi_{\mathrm{M}(\alpha)}(\mathrm{X})$ de $\mathrm{M}(\alpha)$ est donné par le déterminant

$$\chi_{\mathrm{M}(\alpha)}(\mathrm{X}) = \begin{vmatrix} 1-\mathrm{X} & -1 & \alpha \\ 0 & 2-\mathrm{X} & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha-\mathrm{X} \end{vmatrix}$$

Ce déterminant se calcule avec la règle de Sarrus :

$$\begin{aligned}\chi_{\mathrm{M}(\alpha)}(\mathrm{X}) &= (1-\mathrm{X})(2-\mathrm{X})(2-\alpha-\mathrm{X}) + \alpha + 0 - \alpha(2-\mathrm{X}) + \alpha(1-\mathrm{X}) \\ &= (1-\mathrm{X})(2-\mathrm{X})(2-\alpha-\mathrm{X})\end{aligned}$$

> L'utilisation de la règle de Sarrus est intéressante ici, car le polynôme caractéristique cherché est un des termes du développement du déterminant.

Les trois termes diagonaux de $\mathrm{M}(\alpha)$ sont les trois racines de son polynôme caractéristique. On en déduit que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\mathrm{M}(\alpha) \text{ est une matrice à diagonale propre.}}$$

1.b Lorsque les trois valeurs propres de $\mathrm{M}(\alpha)$ sont distinctes, c'est-à-dire lorsque $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$, le polynôme caractéristique de $\mathrm{M}(\alpha)$ est scindé à racines simples, $\mathrm{M}(\alpha)$ est donc diagonalisable. Étudions les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.

- **Si $\boldsymbol{\alpha = 0}$:** Les valeurs propres de $\mathrm{M}(0)$ sont 1 avec l'ordre de multiplicité 1 et 2 avec l'ordre de multiplicité 2. La dimension du sous-espace propre associé à la valeur 1 est au plus égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre, elle est donc exactement égale à 1. On cherche la dimension de l'espace propre associé à la valeur 2, et pour cela on résout le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ce système s'écrit $$\left\{\begin{aligned} -x - y &= 0 \\ 0 &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}\right.$$

On en déduit que le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est le plan d'équation $x + y = 0$, il est donc de dimension 2. Or l'ordre de multiplicité de la valeur propre 2 dans le polynôme caractéristique est 2, on en conclut que la matrice $\mathrm{M}(0)$ est diagonalisable.

- **Si $\boldsymbol{\alpha = 1}$:** Les valeurs propres de $\mathrm{M}(1)$ sont 1 avec l'ordre de multiplicité 2 et 2 avec l'ordre de multiplicité 1. On est alors amené à résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{qui s'écrit} \quad \left\{\begin{aligned} -y + z &= 0 \\ y - z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}\right.$$

L'espace propre associé à la valeur 1 est la droite définie par les deux équations non proportionnelles

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Un vecteur directeur de cette droite est par exemple le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

L'espace propre associé à la valeur propre 1, qui est d'ordre de multiplicité 2, est de dimension 1. Par conséquent, la matrice $\mathrm{M}(1)$ n'est pas diagonalisable.

Finalement, $\boxed{\mathrm{M}(\alpha) \text{ est diagonalisable pour tout } \alpha \in \mathbb{R} - \{1\}.}$

Rappelons qu'une condition suffisante (et non nécessaire) pour qu'une matrice soit diagonalisable est que son polynôme caractéristique soit scindé à racines simples : c'est ce critère que l'on utilise pour traiter le cas $\alpha \neq 0, 1$. Le rapport du jury précise qu'il s'agit d'une « erreur trop fréquente » que d'affirmer que cette condition est nécessaire.

En revanche, le critère que l'on utilise ensuite est le suivant : une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé, et l'ordre de multiplicité de chacune de ses racines est égale à la dimension de l'espace propre associé. Une méthode plus rapide que la résolution explicite du système consiste à déterminer le rang de la matrice $\mathrm{M} - \lambda\mathrm{I}$. Par exemple pour le cas $\alpha = 0$ et la valeur propre $\lambda = 2$, on a

$$\mathrm{M}(0) - 2\mathrm{I} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque immédiatement que cette matrice est de rang 1, puisque les lignes 1 et 2 sont multiples de la ligne 3. Le théorème du rang nous dit alors que son noyau – qui est exactement l'espace propre cherché – a pour dimension 2.

2 Calculons le polynôme caractéristique χ_A de cette matrice :

$$\chi_\mathrm{A}(\mathrm{X}) = \begin{vmatrix} -\mathrm{X} & 0 & -1 \\ 0 & -\mathrm{X} & 0 \\ 1 & 0 & -\mathrm{X} \end{vmatrix} = -\mathrm{X}^3 - \mathrm{X} = -\mathrm{X}(\mathrm{X}^2 + 1)$$

Le polynôme χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ car $\mathrm{X}^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La matrice A n'est pas une matrice à diagonale propre.}}$$

3 Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Écrivons $\qquad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Supposons $\mathrm{A} \in \mathcal{E}_2$. Alors le polynôme caractéristique $\chi_\mathrm{A}(\mathrm{X}) = (a - \mathrm{X})(d - \mathrm{X}) - bc$ vérifie l'égalité $\chi_\mathrm{A}(\mathrm{X}) = (a - \mathrm{X})(d - \mathrm{X})$. Par suite, $bc = 0$ et donc $b = 0$ ou $c = 0$, et la matrice A est triangulaire, supérieure ou inférieure.

Réciproquement, toute matrice triangulaire est à diagonale propre – comme le précise l'énoncé en introduction.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{E}_2 \text{ est l'ensemble des matrices triangulaires, supérieures et inférieures.}}$