Mines Maths toutes filières 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Perrier (ENS Cachan) ; il a été relu par Denis Conduché (ENS Ulm) et Gilbert Monna (Professeur en CPGE).

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Le premier problème, composé de quatre parties, porte surtout sur le programme d'analyse.

- La partie A étudie les fonctions $f : t \mapsto \exp(-1/t)$ et $g : t \mapsto \exp(-1/t)/t$, en particulier leur régularité et leurs variations. On calcule une primitive de $t \mapsto g(1/t)$ avant de déterminer le comportement asymptotique des solutions de l'équation $f(t) = t/n$.
- La partie B propose l'étude d'une courbe paramétrée, dont f' est la première composante et g la seconde.
- Dans la partie C, on étudie les primitives F et G de f et g qui s'annulent en 0 : on détermine leur comportement asymptotique, puis on utilise F pour résoudre une équation différentielle.
- Dans la partie D, on détermine le développement limité en 0 à tout ordre d'une solution particulière de l'équation différentielle résolue à la fin de la partie C.

On peut regretter que beaucoup de questions de ce problème n'aient aucun but autre que calculatoire. Ce problème demeure cependant un bon entraînement, puisqu'il fait appel à toutes les notions d'analyse au programme de première année.

Le deuxième problème est, lui aussi, composé de quatre parties.

- La partie A propose d'étudier un mouvement dans l'espace, essentiellement à l'aide d'outils de géométrie analytique. Cette partie peut être traitée très rapidement si l'on est à l'aise avec les formules de géométrie élémentaire en dimension 3.
- Dans la partie B, on construit un polynôme à l'aide de ses fonctions symétriques. Cette partie utilise surtout des formules trigonométriques.
- Dans la partie C, on construit les endomorphismes ayant pour noyaux un plan P donné.
- Enfin dans la partie D, on étudie une matrice de projection M, puis on calcule $(\mathrm{M} + \mathrm{I})^n$ pour terminer par la structure algébrique de l'ensemble des matrices de la forme $a\mathrm{M} + b\mathrm{I}$.

L'ensemble de ce sujet fait intervenir quelques « bêtes noires » des étudiants : géométrie, équations différentielles, et formules trigonométriques. Les questions concernées ne demandent pas toutefois une grande maîtrise de ces notions ; il semble donc judicieux de consacrer un peu de temps à leur apprentissage pour faire la différence aux concours.

Indications

Premier problème

2 Poser $u = 1/t$ afin de se ramener à des croissances comparées en $+\infty$.

4.a Effectuer une intégration par parties.

4.b Procéder à un développement limité de $t \mapsto \exp(-t)$ en 1, puis multiplier les développements limités.

5.a Remarquer que la résolution de $(\mathbf{E_n})$ est équivalente à celle de l'équation

$$g(t) = 1/n$$

puis utiliser l'étude de g effectuée à la question 3.

5.b Utiliser la monotonie de la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis la monotonie de la fonction g.

5.c Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis que $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

11.a Procéder à une intégration par parties.

11.b Se servir de la relation de Chasles en 1. Dans l'une des deux intégrales, majorer g par $t \mapsto 1/t$.

11.c Utiliser la réponse de la question 11.a.

15 À l'aide des questions 13 et 14, appliquer la formule de Taylor en 0 pour obtenir α, β, γ, puis tester le polynôme obtenu.

16.b Évaluer les premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sans effectuer les calculs, afin de conjecturer une formule pour u_n. Démontrer ensuite celle-ci par récurrence.

Deuxième problème

5 Factoriser l'expression par $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t}$, puis s'aider du fait que $1, \mathrm{e}^{\,2\mathrm{i}\pi/3}$ $\mathrm{e}^{\,-2\mathrm{i}\pi/3}$ sont les racines troisièmes de l'unité.

6 Prendre la partie imaginaire et la partie réelle de l'égalité qui figure dans la question 5.

9 Pour l'une des méthodes, utiliser l'identité remarquable $(a + b + c)^2$.

10.a Montrer que 0 est racine double de R.

14 Prouver d'abord qu'il existe λ_i, λ_j et λ_k tels que $\overrightarrow{e} = \lambda_i \overrightarrow{i'} + \lambda_j \overrightarrow{j'} + \lambda_k \overrightarrow{k'}$, puis effectuer le produit scalaire par $\overrightarrow{i'}$, $\overrightarrow{j'}$ et $\overrightarrow{k'}$.

15.c S'aider de la réponse à la question 15.a pour déterminer le rang de u, puis appliquer le théorème du rang.

17 Pour calculer P^{-1}, utiliser le fait que le changement de base entre B et B′ est un changement de base orthonormale.

18.b Démontrer le résultat par récurrence.

19.b Pour factoriser $a\mathrm{M} + b\mathrm{I}$, écrire I sous la forme $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}$.

19.d S'aider de la réponse de la question 19.c.

Premier problème

A. Généralités

1 La fonction $t \mapsto 1/t$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, et la fonction exponentielle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que

$$\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^\star \text{ en tant que composée de fonctions } \mathscr{C}^\infty.}$$

De même, $\boxed{g \text{ est } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^\star \text{ en tant que produit de fonctions } \mathscr{C}^\infty.}$

En appliquant la règle de dérivation des fonctions composées, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^\star \qquad f'(t) = \frac{1}{t^2}\exp\left(-\frac{1}{t}\right) = \frac{g(t)}{t}$$

soit $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^\star \qquad tf'(t) = g(t)}$$

2 Posons $u = 1/t$. Lorsque t tend vers 0^+, u tend vers $+\infty$. Chercher une limite à g en 0^+ revient donc à chercher une limite à $u \mapsto u\exp(-u)$ lorsque u tend vers $+\infty$. Par croissance comparée, nous savons que $u \mapsto u\exp(-u)$ admet une limite nulle en $+\infty$. Finalement,

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = 0$$

c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ avec } g(0) = 0.}$$

Afin d'étudier la dérivabilité de g en 0, formons son taux de variation en 0

$$\frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \frac{\exp\left(-\dfrac{1}{t}\right)}{t^2}$$

Procédons de même que pour la continuité de g en 0. Posons $u = 1/t$; la dérivabilité de g en 0 se ramène ainsi à la recherche d'une limite de $u \mapsto u^2\exp(-u)$ en $+\infty$. Par croissance comparée, cette limite est nulle, d'où

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est dérivable en } 0, \text{ avec } g'(0) = 0.}$$

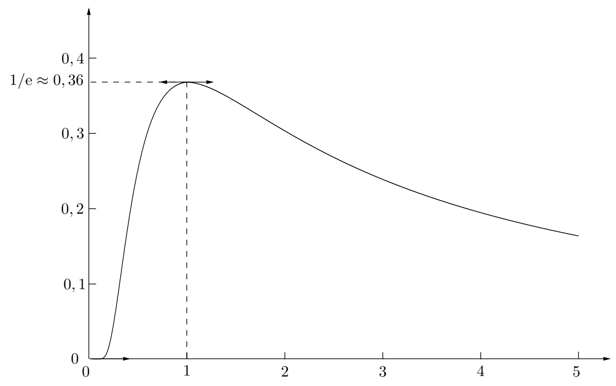
3 La fonction g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, et sa dérivée, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^\star$, est égale à

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\dfrac{1}{t}\exp\left(-\dfrac{1}{t}\right) - \exp\left(-\dfrac{1}{t}\right)}{t^2} \\ &= \frac{1-t}{t^3}\exp\left(-\frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

Dans l'expression de $g'(t)$, t^3 est positif sur $\mathbb{R}_+$, de même que $\exp(-1/t)$. La fonction g' est donc du même signe que $1-t$, qui est strictement positif sur $]\,0\,;1\,[$, et strictement négatif sur $]\,1\,;+\infty\,[$. Pour terminer l'étude de g, il reste à étudier sa limite en $+\infty$. La fonction $t \mapsto 1/t$ tend vers 0 en $+\infty$, alors que $t \mapsto \exp(1/t)$ tend vers 1 en $+\infty$. Ainsi, g admet 0 pour limite en $+\infty$. Il en découle le tableau de variations suivant pour g :

t	0		1		$+\infty$
g'	0	$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$1/\mathrm{e}$	$\searrow$	0

L'étude précédente de g permet de proposer le tracé suivant :



> La fonction g est équivalente à $t \mapsto 1/t$ en $+\infty$, donc la décroissance en $+\infty$ est assez lente.

4.a Étant donnée la définition de g,

$$\mathrm{H}(t) = \int_1^t g\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \int_1^t x\,\exp(-x)\,\mathrm{d}x$$

Afin de calculer H, effectuons une intégration par parties. Posons

$$u(x) = x \qquad \text{d'où} \qquad u'(x) = 1$$
$$v'(x) = \exp(-x) \qquad \text{on choisit} \qquad v(x) = -\exp(-x)$$

Ce qui donne
$$\begin{aligned}\mathrm{H}(t) &= [-x\exp(-x)]_1^t + \int_1^t \exp(-x)\,\mathrm{d}x\\ &= -t\exp(-t) + \frac{1}{\mathrm{e}} + [-\exp(-x)]_1^t\\ &= -t\exp(-t) + \frac{1}{\mathrm{e}} - \exp(-t) + \frac{1}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{H}(t) = \frac{2}{\mathrm{e}} - (t+1)\exp(-t)}$$