ENAC Maths toutes filières 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Paul Pichaureau (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Jean Starynkévitch (Professeur en CPGE) et Sophie Rainero (Professeur en CPGE).

Il est habituel que les sujets de l'ENAC abordent de nombreux points du programme de PCSI. Tout comme l'année précédente, ce sujet privilégie les questions portant sur les nombres complexes, les équations différentielles et le calcul intégral. Cette année toutefois, une partie importante des questions est consacrée à l'algèbre linéaire.

- La partie I (questions 1 à 4) porte sur les nombres complexes et les systèmes d'équations linéaires. Elle utilise les propriétés de la racine cubique de l'unité $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$.
- La partie II (questions 5 à 9) traite de deux suites définies à partir d'intégrales. Plusieurs thèmes classiques sont abordés : majoration, limite, équivalents de suites.
- La partie III (questions 10 à 21) est la plus technique du sujet. Deux fonctions φ_1 et φ_2 d'une variable réelle t, et dépendantes d'un paramètre réel x, sont définies puis étudiées. À partir des intégrales par rapport à t de ces deux fonctions, on pose deux nouvelles fonctions dépendantes de x, qui sont ensuite examinées. Les sujets balayés sont nombreux : calculs d'intégrales, changements de variables, calcul d'équivalents et de dérivées, etc.
- La partie IV (questions 22 à 32) concerne l'algèbre linéaire. On étudie un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. En introduisant l'endomorphisme de dérivation, on en vient à aborder différentes questions sur les équations différentielles réelles. On utilise pour cela des matrices d'endomorphismes. Bien que classique, cette partie exige une excellente compréhension du cours d'algèbre linéaire de Sup.
- Enfin, la partie V (questions 33 à 36) porte sur les polynômes de Tchebychev. Plusieurs types de calculs sur les polynômes sont effectués. Les questions de cette partie, sans être difficiles, sont assez calculatoires.

Les sujets de l'ENAC sont des épreuves exigeantes, qui nécessitent beaucoup de soin et de concentration. Elles privilégient les aspects calculatoires et techniques. Il convient de s'entraîner spécifiquement à ces difficultés.

Le candidat n'est tenu de répondre qu'à 24 questions sur 36. Cela permet de sauter les questions qui, à la première lecture, semblent exiger du temps. Toutefois, les questions sont très liées les unes aux autres ; on ne peut pas réussir cette épreuve sans entrer dans le détail de nombreuses questions dont le résultat est utilisé plus tard.

La technique du QCM est assez particulière. Beaucoup de réponses pourraient sembler justes... si on les lit trop rapidement ! En général, il est indispensable d'examiner toutes les réponses à une question avant de pouvoir valider les bonnes.

Indications

1 Réponses C et D : mettre j sous forme cartésienne.

2 Grâce à un des résultats de la question 1, les réponses proposées s'écrivent plus simplement.

3 Déterminer x et y à l'aide de la question 2.

4 En cherchant un contre-exemple, écarter les réponses A, B et C.

5 Intégrer par parties.

6 Intégrer par parties.

7 En prenant des valeurs judicieuses de a et de n, écarter les réponses A, C et D.

9 Examiner les justifications de chacune des réponses.

13 Reconnaître la primitive de $t \mapsto 1/(1+t^2)$.

14 Étudier les bornes de l'intégrale avec le changement de variable $t = (\tan u)/x$. Remarquer ensuite que

$$\frac{1}{1-(1-x^2)v^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-(1-x^2)^{1/2}v} + \frac{1}{1+(1-x^2)^{1/2}v}\right]$$

16 Pour calculer $f(x) + f(1/x)$, utiliser le changement de variable $v = \pi/2 - u$.

17 Dresser le tableau de variation de h.

18 Se servir de la fonction h de la question précédente pour comparer K et f.

19 Utiliser une des réponses de la question 16.

20 Calculer $\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{\mathrm{P}+\mathrm{Q}} - \dfrac{1}{\mathrm{P}} + \dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}^2}\right)$, intégrer et en déduire la valeur $g'(x)$ en passant à la limite quand k tends vers 0.

22 Trouver une famille génératrice de E. Prouver que E n'est pas stable par la multiplication de fonctions (par exemple en étudiant ${f_6}^2$).

23 Étudier les limites, lorsque x tend vers $+\infty$, de $f(x)\mathrm{e}^{-x}$ et de $f(x)\mathrm{e}^{x}$ dans plusieurs cas particuliers.

24 Établir la liberté de la famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$, en examinant les équivalents en $+\infty$ et $-\infty$ d'une combinaison linéaire de ces fonctions.

25 Prouver que E est stable par f en calculant l'image des vecteurs de la famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ par D.

27 Utiliser la matrice de D.

28 Calculer la matrice de $\mathrm{D}^2 - \mathrm{id}$.

30 Se ramener à une équation différentielle du second ordre, puis la résoudre.

31 Examiner la dimension de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{D} - \mathrm{id})^3$.

32 Utiliser la même méthode qu'à la question 30.

33 Calculer $\mathrm{P}_n(1)$ et comparer cette valeur à celle que fournissent les réponses A et B. Pour les réponses C et D, se servir de la formule de Moivre.

34 Dériver la relation définissant P_n pour trouver $\mathrm{P}'_n(-1)$.

35 Déterminer le monôme de plus haut degré de P_n.

36 Calculer P_3 et P_4 à partir de la réponse à la question 33.

Partie I

$\boxed{1}$ Trouvons d'abord par le calcul $j^2 = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}$ et $j^3 = \mathrm{e}^{6\mathrm{i}\pi/3} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1$. Ainsi la réponse A est fausse et la réponse B est correcte.

Ensuite, mettons les nombres complexes j et j^2 sous forme cartésienne

$$j = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad j^2 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Par le calcul, on obtient alors

$$\begin{aligned} 1 + j + j^2 &= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \\ 1 - j - j^2 &= 1 - \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \end{aligned}$$

La réponse C est correcte, mais pas la réponse D.

□	■	■	□	□
A	B	C	D	E

> Rappelons que j est une racine cubique de l'unité, c'est-à-dire une solution de l'équation $\mathrm{X}^3 - 1 = 0$ (on retrouve la réponse B). Or, cette équation se factorise simplement en $(\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1) = 0$. Comme $j \neq 1$, j est racine de $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$, ce qui est une autre façon de trouver la réponse C.
>
> On peut aussi utiliser la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique
>
> $$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0 \qquad \text{avec } j \neq 1 \text{ et } j^3 = 1.$$

$\boxed{2}$ Comme on a remarqué à la question précédente que $1 + j + j^2 = 0$, ces équations se simplifient : il suffit de savoir combien valent $3y$ et $3x$.

En additionnant les trois équations du système (E), il vient

$$3x + (1 + j + j^2)y + (1 + j^2 + j)z = 3x = a + b + c$$

si bien que la réponse D est fausse.

Multiplions ensuite la seconde équation par j^2 et la troisième par j, puis faisons la somme pour trouver

$$(1 + j + j^2)x + (1 + j^3 + j^3)y + (1 + j^4 + j^2)z = 3y + (1 + j + j^2)z = 3y = a + j^2 b + jc$$

ce qui nous indique que la réponse A est juste. Sans informations supplémentaires sur a, b et c, les autres réponses sont fausses.

■	□	□	□	□
A	B	C	D	E

3 D'après le calcul de la question précédente, on sait tout de suite que

$$x = \frac{1}{3}(a+b+c) \qquad\qquad y = \frac{1}{3}(a+j^2b+jc)$$

En utilisant la première équation, on a ensuite

$$z = a - x - y = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}(1+j^2)b - \frac{1}{3}(1+j)c = \frac{1}{3}(a+jb+j^2c)$$

où on s'est servi de l'égalité $1+j+j^2=0$, qui donne $1+j^2=-j$ et $1+j=-j^2$. On voit que le système possède une unique solution, les réponses A et B sont donc fausses. La réponse D est fausse également, puisque la valeur de y ne convient pas. Seule la réponse C est juste.

A B C D E

On peut aussi calculer le déterminant du système (E), avec la règle de Sarrus

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = j^2 + j^2 + j^2 - j - j^4 - j = 3j^2 - 3j = -3\sqrt{3}\mathrm{i}$$

Comme ce déterminant est non nul, le système (E) possède une unique solution. En trouvant y d'après la question 2, on voit alors que seule la réponse C est juste.

4 Avec les trois réels $a=0$, $b=1$ et $c=0$, on trouve comme solution $x=1/3$, $y=j^2/3$ et $z=j/3$. Ces solutions ne sont pas réelles alors que a, b et c le sont ; la réponse A est fausse.

Avec les complexes non réels $a=b=c=\mathrm{i}$, il vient $x=\mathrm{i}$, qui n'est pas réel. Ainsi, la réponse B est également fausse.

Avec a réel et $b=c=0$, on obtient $x=y=z=a/3$, qui est bien une solution réelle du système (E). Toutefois cette condition n'est pas nécessaire. En effet, avec $a=b=c=1$, on trouve $x=1$ et $y=z=0$ qui est une solution réelle. La réponse C n'est donc pas correcte.

Comme j^2 et $-j$ ne sont pas complexes conjugués, la réponse D est également fausse, puisqu'elle donne une justification fausse.

A B C D E

Notons toutefois que la réponse D donne la bonne condition nécessaire et suffisante. En effet, si a est réel et b et c sont complexes conjugués alors

$$\overline{y} = \frac{1}{3}\left(\overline{a} + \overline{b}\,\overline{j^2} + \overline{c}\,\overline{j}\right) = \frac{1}{3}\left(a + cj + bj^2\right) = y$$

ce qui prouve que y est réel. Par un calcul similaire, on trouve également z réel. Réciproquement, si x, y et z sont réels, alors a est réel comme somme de trois réels. De plus

$$\overline{b} = \overline{x} + \overline{j}\,\overline{y} + \overline{j^2}\,\overline{z} = \left(x + j^2y + jz\right) = c$$

donc b et c sont complexes conjugués.

Moralité : il faut faire bien attention à écarter les réponses qui donnent une justification fausse. C'est par ailleurs un bon moyen de gagner du temps.