

Mines Physique 2 PSI 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benoît Lobry (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Alban Sauret (ENS Lyon) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Centrée sur le thème général des hydrates, cette épreuve est composée de trois parties indépendantes consacrées chacune à un domaine de la physique :

- la première partie s'intéresse à la structure cristalline des hydrates et ne demande aucune connaissance de cours particulière ;
- dans la deuxième, on envisage très classiquement l'utilisation des hydrates au sein d'un système de climatisation ;
- enfin, la troisième partie, plus difficile, est consacrée à l'étude d'un écoulement de type Poiseuille d'un fluide dit de Bingham présentant un comportement non linéaire.

Les concepts physiques mis en jeu dans cette épreuve sont relativement peu nombreux : changement d'état du corps pur, machines thermiques, écoulement visqueux. La première partie est facile. La deuxième n'est guère plus difficile si l'on sait utiliser la notion de fraction massique. La troisième partie est la plus originale. Les raisonnements sont ceux effectués en cours sur l'écoulement de Poiseuille mais ils sont ici appliqués différemment à un fluide non newtonien. Cela peut dérouter. L'énoncé est limpide, directif et plutôt court pour une épreuve de quatre heures.

INDICATIONS

Première partie

- 1 Utiliser l'expression de \vec{E}_x et la définition de α données dans l'énoncé.
- 3 L'interaction de la molécule piégée et de la structure hôte est « attractive » et « à courte portée ».
- 6 Comptabiliser le nombre de cavités par unité de volume de chacune des deux structures.

Deuxième partie

- 9 Pour un mélange diphasé, $h = (1 - x^V)h^L + x^V h^V$.
- 11 Écrire le premier principe pour un système ouvert sous la forme d'un bilan enthalpique.
- 12 Contrairement à ce que demande l'énoncé, justifier que w s'identifie directement à $\Delta h_{1 \rightarrow 2}$.
- 13 Expliquer pourquoi $e < e_c$.
- 14 Initialement, le coulis est un mélange d'hydrates solides et d'eau liquide ; lors de son utilisation, les hydrates fondent et s'échauffent alors que l'eau s'échauffe.

Troisième partie

- 18 Utiliser la loi de comportement à seuil d'un fluide de Bingham et l'expression du nombre de Reynolds d'un fluide newtonien.
- 19 Utiliser l'incompressibilité de l'écoulement.
- 20 Utiliser l'équation analogue à l'équation d'Euler donnée par l'énoncé. Justifier la nullité de l'accélération convective.
- 21 Intégrer entre $z = 0$ et $z = L$ l'égalité obtenue à la question précédente.
- 23 Que vaut $\frac{du}{dr}$ pour $0 \leq r \leq R$?
- 24 Exprimer $\frac{du}{dr}$ pour $0 \leq r \leq R_0$ et $R_0 \leq r \leq R$. Résoudre séparément et utiliser la continuité en R_0 .
- 25 Une partie de l'écoulement se fait en bloc.
- 26 Effectuer une intégration par parties.
- 27 Faire le changement de variables $\tau = \frac{\tau_p}{R} r$.
- 28 Il suffit d'intégrer pour $\tau_s \leq \tau \leq \tau_p$ avec $\dot{\gamma} = \frac{\tau - \tau_s}{\eta_p}$.
- 29 Ne pas se formaliser de l'apparente discordance avec la question 23.
- 30 Commenter la linéarité.
- 31 On a $f'(\tau_p) = \tau_p^2 \dot{\gamma}_p$.

HYDRATES ET CLIMATISATION

I. PRÉLIMINAIRE : GÉNÉRALITÉS SUR LES HYDRATES

I.1 Interaction de Van der Waals

1 L'expression du champ \vec{E}_x et la définition de α donnent en termes de dimension

$$[E_x] = \frac{[p_a]}{[\varepsilon_0][x^3]} \quad \text{et} \quad [p_i] = [\varepsilon_0][\alpha][E_x]$$

On en déduit aisément que $[\alpha] = [x^3] = L^3$ et que

La dimension de la polarisabilité α est celle d'un volume.

2 L'énergie potentielle du moment dipolaire \vec{p}_i induit dans le champ \vec{E}_x est

$$W_p = -\vec{p}_i \cdot \vec{E}_x = -\varepsilon_0 \alpha E_x^2$$

d'où

$$W_p = -\frac{\alpha p_a^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 x^6}$$

La force de Van der Waals qui dérive de W_p s'écrit

$$\vec{F}_{\text{vdW}} = -\vec{\text{grad}} W_p = -\frac{dW_p}{dx} \vec{e}_x$$

soit

$$\vec{F}_{\text{vdW}} = -\frac{6\alpha p_a^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 x^7} \vec{e}_x$$

Il s'agit bien d'une force attractive de courte portée puisqu'elle est opposée au vecteur position $\vec{OM} = x \vec{e}_x$ et décroît rapidement en x^7 par comparaison à l'interaction coulombienne entre deux particules chargées qui décroît en x^2 .

I.2 Capacité de stockage

3 Le caractère attractif de l'interaction des molécules d'eau et de l'espèce piégée explique la stabilisation de l'édifice et la diminution du rayon d'une cavité occupée. L'interaction étant à courte portée, elle reste sans effet si le rayon de la molécule piégée est trop faible devant celui de la cavité.

4 Le rapport du rayon de la molécule de CO_2 sur celui de la cavité occupée est

$$y_{\text{dd}} = \frac{255}{395 - 140} = 1,00$$

5 Pour la plus petite cavité envisageable, le rayon minimal d'une molécule piégée est $0,76 \times (391 - 140)$ soit 191 pm.

La molécule d'hélium de rayon 114 pm ne peut donc pas être piégée par l'une ou l'autre des deux structures cubiques.

6 Le nombre de cavités par unité de volume pour chaque structure est

$$\begin{cases} n_{cI} = \frac{8}{a_I^3} = 4,63 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-3} \\ n_{cII} = \frac{24}{a_{II}^3} = 4,64 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-3} \end{cases}$$

À volume équivalent, les deux structures présentent le même nombre de cavités. La proportion des structures est donc sans influence et on adopte la moyenne

$$n_c = 4,63 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-3}$$

7 En considérant une seule molécule de méthane par cavité, la quantité de matière piégée pour 1 m^3 d'hydrate et le volume de gaz libérable sont

$$n_{\text{CH}_4} = \frac{n_c}{N_A} \quad \text{et} \quad V_{\text{CH}_4} = \frac{n_{\text{CH}_4} RT}{P}$$

d'où

$$V_{\text{CH}_4} = \frac{n_c RT}{N_A P} = 187 \text{ m}^3$$

8 Le méthane est un gaz à effet de serre vingt fois plus efficace que le dioxyde de carbone et sa libération sous l'effet d'une élévation de la température renforcerait encore le réchauffement climatique. Dans un autre contexte, on parlerait d'effet boule de neige.