E3A Maths B PSI 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sophie Rainero (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Jérôme Gärtner (ENS Cachan) et Chloé Mullaert (ENS Cachan).

Cette épreuve se compose de deux exercices indépendants. Le premier, plus court, porte sur les polynômes, et le second sur les solutions périodiques d'une équation différentielle.

- Dans le premier exercice, on considère le polynôme unitaire
$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + \sum_{p=0}^{n-1} a_{n-p}\, \mathrm{X}^p$$
de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et on établit par deux méthodes différentes une majoration du module d'une racine de P à l'aide des coefficients de P. La première méthode est algébrique et utilise le calcul du déterminant d'une matrice compagnon. L'autre, analytique, introduit une fonction auxiliaire et fait appel au théorème des valeurs intermédiaires.
- Le second exercice porte sur les solutions périodiques de l'équation différentielle
$$y'' - 2\,y' + 2\,y = f(x)$$
où f est une fonction continue. Après avoir établi quelques propriétés élémentaires des fonctions périodiques, et en particulier démontré que l'ensemble des périodes d'une fonction périodique est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, on étudie la structure des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Puis on précise le nombre de solutions périodiques de (E_f) dans trois cas particuliers simples (second membre non périodique, nul, égal à la fonction cosinus). La partie D est celle où l'on démontre le résultat principal : (E_f) admet une unique solution périodique lorsque la fonction f est continue et périodique. Enfin, la dernière partie propose de calculer cette unique solution périodique dans un cas particulier en utilisant la théorie des séries de Fourier.

Les deux exercices de ce sujet sont intéressants et touchent à de nombreuses parties des programmes de première et deuxième année. Ils sont tous les deux très guidés et d'une difficulté raisonnable pour un candidat maîtrisant son cours. Les correcteurs de cette épreuve regrettent cependant dans leur rapport une connaissance du cours trop imprécise pour certains candidats et concluent sur « la possibilité d'inclure des questions de cours ou des applications directes du cours dans les épreuves à venir ».

Indications

Exercice 1

A.1.b Choisir i tel que $|x_i| = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Max}}\,|x_k|$.

A.2 Essayer de faire apparaître $-\mathrm{P}(\lambda)$ à l'aide d'opérations sur les lignes.

A.3 Appliquer le résultat de la question A.1 avec la matrice $\mathrm{M} = \mathrm{N} - z\,\mathrm{I}_n$.

B.1.b Faire le lien entre les racines de Q sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et celles de g.

B.3 Poser $\alpha = 1 + \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Max}}\,|x_k|$ et vérifier que $\mathrm{Q}(\alpha) \geqslant 0$ afin d'appliquer le résultat de la question B.2.

Exercice 2

B.2.a.i Utiliser deux fois de suite la caractérisation de la borne inférieure.

B.2.a.ii Procéder par double inclusion.

B.2.b On pourra établir la densité par caractérisation séquentielle en se servant de la caractérisation de la borne inférieure.

C.1 Utiliser la question A.2.

C.2 Pour démontrer qu'une solution périodique est nécessairement nulle, penser à la question 1 de la partie A.

C.3 Se servir de la question C.1.

D.1.a.ii Lorsque $y(0) = y(\mathrm{T})$ et $y'(0) = y'(\mathrm{T})$, appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour démontrer que la fonction $y - z$ est nulle et en déduire que y est T-périodique.

D.1.b Penser à l'équivalence établie dans la question D.1.a.ii.

D.2.a.ii Utiliser la question C.2.

D.2.b.i Se servir de la question C.1.

D.2.b.ii Utiliser la question C.2.

E.3 Se souvenir du résultat de la partie D pour prouver l'unicité.

E.4 Résoudre (E_f) sur $[\,-\pi\,;\pi\,]$ afin d'obtenir une autre expression de la fonction S sur $[\,-\pi\,;\pi\,]$. Calculer $\mathrm{S}(0)$ de deux manières.

Exercice 1

A. Utilisation de méthodes algébriques

A.1.a La matrice M n'étant pas inversible, il existe un élément Y de F non nul et tel que $\mathrm{M\,Y} = 0$. Comme Y n'est pas le vecteur nul, le réel

$$\beta = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant k \leqslant n} |y_k|$$

est strictement positif. Définissons le vecteur $\mathrm{X} = (1/\beta)\,\mathrm{Y}$. Par linéarité, X vérifie également $\mathrm{M\,X} = 0$. De plus,

$$\forall k \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!] \qquad |x_k| = \left|\frac{y_k}{\beta}\right| = \frac{|y_k|}{\beta}$$

puisque β est strictement positif. Par conséquent,

$$\operatorname*{Max}_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| = \frac{1}{\beta} \operatorname*{Max}_{1 \leqslant k \leqslant n} |y_k| = \frac{\beta}{\beta} = 1$$

Ainsi,
$$\boxed{\exists \mathrm{X} \in \mathrm{F} \qquad \mathrm{M\,X} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname*{Max}_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| = 1}$$

A.1.b Soit i un élément de $[\![\, 1\,;\, n \,]\!]$ tel que $|x_i| = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| = 1$. Le vecteur M X est nul donc en particulier l'élément de la i^{e} ligne de ce vecteur vaut 0, ce qui s'écrit

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, x_j = 0$$

soit
$$m_{ii}\, x_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} m_{ij}\, x_j$$

L'inégalité triangulaire permet alors d'obtenir

$$|m_{ii}| = |m_{ii}\, x_i| = \left| -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} m_{ij}\, x_j \right| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |m_{ij}|\, |x_j|$$

Comme $1 = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$, il s'ensuit $\quad |m_{ii}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |m_{ij}|$

Alors
$$\boxed{\exists i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!] \qquad |m_{ii}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |m_{ij}|}$$

> Ce résultat est un classique de l'écrit comme de l'oral, mais il est plus souvent demandé sous sa forme contraposée : démontrer que si M est une matrice à diagonale dominante, c'est-à-dire si
>
> $$\forall i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!] \qquad |m_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |m_{ij}|$$
>
> alors M est inversible.

A.2 Soit λ un nombre complexe fixé.

$$\det(\mathrm{N} - \lambda\,\mathrm{I}_n) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & -\lambda & \ddots & & \vdots & -a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & -a_3 \\ \vdots & & 0 & 1 & -\lambda & -a_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_1-\lambda \end{vmatrix}$$

Notons L_i la i^{e} ligne de ce déterminant et ajoutons $\sum\limits_{j=2}^{n} \lambda^{j-1}\,\mathrm{L}_j$ à la première ligne. Cette opération élémentaire ne change pas la valeur du déterminant, donc

$$\det(\mathrm{N} - \lambda\,\mathrm{I}_n) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_n - \sum\limits_{j=2}^{n-1} \lambda^j\, a_{n-j+1} - (a_1-\lambda)\,\lambda^{n-1} \\ 1 & -\lambda & \ddots & & \vdots & -a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & -a_3 \\ \vdots & & 0 & 1 & -\lambda & -a_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_1-\lambda \end{vmatrix}$$

Or, $$-a_n - \sum_{j=2}^{n-1} \lambda^j\, a_{n-j+1} - (a_1-\lambda)\,\lambda^{n-1} = -\mathrm{P}(\lambda)$$

Il vient alors par développement par rapport à la première ligne

$$\det(\mathrm{N} - \lambda\,\mathrm{I}_n) = (-1)^{1+n}\big(-\mathrm{P}(\lambda)\big) \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -\lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^n\,\mathrm{P}(\lambda)$$

Finalement, $$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \det(\mathrm{N} - \lambda\,\mathrm{I}_n) = (-1)^n\,\mathrm{P}(\lambda)}$$

Il s'agit ici d'un calcul très classique : celui du polynôme caractéristique d'une matrice compagnon. Dans le rapport du concours, le jury se plaint néanmoins que ce calcul soit « l'occasion de multiples approximations et d'affirmations gratuites ».

Une autre méthode de calcul de ce polynôme caractéristique consiste à effectuer une récurrence : en notant $\mathrm{D}(n)$ le déterminant à l'ordre n, un développement par rapport à la première ligne donne la relation

$$\mathrm{D}(n) = -\lambda\,\mathrm{D}(n-1) - (-1)^{n+1}\,a_n$$

En outre, $$\mathrm{D}(2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -a_2 \\ 1 & -a_1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a_1\,\lambda + a_2$$

Une récurrence permet alors de retrouver le même résultat.