E3A Maths A PSI 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Florence Monna (ENSTA) ; il a été relu par Guillaume Batog (ENS Cachan) et Chloé Mullaert (ENS Cachan).

L'épreuve se compose de quatre questions de cours et d'un problème portant exclusivement sur l'algèbre linéaire et la réduction des endomorphismes. Il comporte cinq parties relativement indépendantes.

- La première partie est essentiellement calculatoire. Elle commence par l'étude d'un exemple, avec la recherche des valeurs propres et sous-espaces propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ identifié à sa matrice dans la base canonique. On termine par une réduction par blocs de Jordan de la matrice.
- La deuxième partie étudie la matrice de Jordan $\mathrm{J}(0)$ d'ordre n, jusqu'au calcul de son exponentielle, pour en déduire que $\exp\big(\mathrm{J}(0)\big) - \mathrm{I}_n$ est nilpotente. Il n'y a pas de difficulté majeure dans ces questions, à l'exception de la manipulation, dans un contexte assez simple, de matrices $n \times n$.
- On passe ensuite à des propriétés très classiques des noyaux itérés d'un endomorphisme, dans une partie très courte, proche du cours.
- La partie IV détermine tous les endomorphismes nilpotents de rang $n-1$ sur un espace vectoriel de dimension n. Cette étude un peu théorique au départ est nettement plus difficile que les précédentes. Elle nécessite une bonne maîtrise de l'algèbre linéaire et utilise des résultats de la partie précédente, qu'il faut donc avoir bien compris.
- La dernière partie propose la résolution d'une équation matricielle, consistant à chercher les matrices dont l'exponentielle est une matrice donnée. On est amené à utiliser un petit peu de topologie des espaces vectoriels normés, puis l'exponentielle complexe et quelques résultats antérieurs du problème. Cette étude assez originale se termine par des applications numériques.

Au final, c'est un problème intéressant malgré quelques passages calculatoires. On peut le traiter dès la fin du chapitre portant sur la réduction des endomorphismes, à condition que le cours de topologie ait été fait avant.

Indications

Partie I

I.1 Calculer le polynôme caractéristique de A.

I.3 Construire une base adaptée à l'aide de la question I.2.

Partie II

II.2.1 Considérer l'endomorphisme ν canoniquement associé à J(0) et regarder les images des vecteurs de la base canonique par ν, ν^2, etc.

II.3 Utiliser le fait que J(0) est nilpotente.

II.5 Généraliser le résultat de la question II.4 pour une combinaison linéaire quelconque.

Partie III

III.2 Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers croissante majorée.

Partie IV

IV.1.3 Appliquer le théorème du rang à $w : \mathrm{Im}\,(v^p) \longrightarrow \mathrm{E}$.

IV.1.4 Utiliser l'inégalité de la question précédente avec $p = i - 1$ et $q = 1$.

IV.1.5 Montrer la propriété $\dim\big(\mathrm{Ker}\,(v^i)\big) = i$ pour $i \in [\![\, 1\,;\, r\,]\!]$ puis supposer que $r < n$ pour aboutir à une contradiction.

IV.3 Montrer que B_1 est libre dans E en composant d'abord par v^{n-1} une combinaison linéaire nulle des vecteurs de B_1.

IV.5 Donner une caractérisation faisant intervenir J(0).

Partie V

V.1 Ne pas oublier le fait que l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ est continue pour passer à la limite.

V.2 Écrire $\mathrm{e}^{\,z} = \mathrm{e}^{\,x}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,y}$ et résoudre en séparant module et argument.

V.4.1 Penser au fait que $\mathrm{e}^{\,s} = \mu$.

V.4.2 Utiliser la propriété de α donnée au début du sujet : si A et B commutent, alors $\alpha(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \alpha(\mathrm{A})\alpha(\mathrm{B})$.

V.4.3 Penser à la question II.5.

V.4.4 Utiliser la question IV.5 ainsi que les questions II.1 et II.2.2.

V.5 Utiliser la question V.1.

V.6 Ne pas oublier que la transposition est continue.

V.7.2.2 Calculer H^k à l'aide d'un produit matriciel par blocs puis sommer et passer à la limite.

V.7.2.3 Utiliser le résultat de la question I.3 pour relier A à $\alpha(\mathrm{H})$.

Questions de cours

1 Par définition, $\boxed{\text{rg}\,(\text{M}) = \dim(\text{Im M})}$

avec Im M l'espace vectoriel engendré par les colonnes de M.

> Notons également que la taille du plus grand déterminant non nul extrait de la matrice est égal au rang de cette matrice.

2 Le théorème du rang s'énonce ainsi :

> Soit f une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F de dimension finie. Alors
> $$\text{rg}\,(f) + \dim(\text{Ker } f) = \dim \text{E}$$

3 Deux matrices carrées A et B de même taille sont semblables si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que

$$\boxed{\text{A} = \text{PBP}^{-1}}$$

Dans ce cas, A et B ont même rang.

> Les matrices A et B représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes. Elles ont même rang car le rang d'une application linéaire est inchangé en le composant avec un isomorphisme.

4 Pour un endomorphisme u, $(\text{X}^k)(u) = u^k$ est la composée k fois de u.

> Un polynôme P est dit annulateur de u endomorphisme d'un espace vectoriel E lorsqu'il vérifie
> $$\text{P}(u) = 0_{\mathscr{L}(\text{E})}$$

De la même manière,

> Un polynôme P est dit annulateur d'une matrice carrée A de taille n lorsqu'il vérifie
> $$\text{P}(\text{A}) = \text{O}_n$$

où O_n est la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

> Un polynôme annulateur d'un endomorphisme $u : \text{E} \longrightarrow \text{E}$ est un élément du noyau du morphisme d'algèbres $\psi : (\mathbb{K}[\text{X}], +, \times, \cdot) \longrightarrow (\mathscr{L}(\text{E}), +, \circ, \cdot)$ défini par $\psi(\text{X}) = u$. Il en est de même pour les matrices de $(\text{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$.

Problème

I. Quelques calculs préliminaires

I.1 Les valeurs propres de A sont exactement les racines de son polynôme caractéristique. Calculons-le :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X}) &= \det(\mathrm{A}-\mathrm{X}\mathrm{I}_3)\\
&= (-1)^3\det(\mathrm{X}\mathrm{I}_3-\mathrm{A})\\
&= -\begin{vmatrix} \mathrm{X}-2 & 3 & -3\\ 3 & \mathrm{X}-3 & 4\\ 3 & -4 & \mathrm{X}+5\end{vmatrix}\\
&= -\begin{vmatrix} \mathrm{X}-2 & 0 & -3\\ 3 & \mathrm{X}+1 & 4\\ 3 & \mathrm{X}+1 & \mathrm{X}+5\end{vmatrix} && \mathrm{C}_2 \leftarrow \mathrm{C}_2+\mathrm{C}_3\\
&= -(\mathrm{X}+1)\begin{vmatrix} \mathrm{X}-2 & 0 & -3\\ 3 & 1 & 4\\ 3 & 1 & \mathrm{X}+5\end{vmatrix}\\
&= -(\mathrm{X}+1)\begin{vmatrix} \mathrm{X}-2 & 0 & -3\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & 0 & \mathrm{X}+1\end{vmatrix} && \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3-\mathrm{L}_2\\
&= -(\mathrm{X}+1)^2\begin{vmatrix} \mathrm{X}-2 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix} && \text{en développant selon } \mathrm{L}_3\\
\mathrm{P}(\mathrm{X}) &= -(\mathrm{X}+1)^2(\mathrm{X}-2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de A sont 2 (valeur propre simple) et } -1 \text{ (valeur propre double).}}$$

Déterminons le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2.

$$\mathrm{A}-2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3\\ -3 & 1 & -4\\ -3 & 4 & -7\end{pmatrix}$$

Soit X dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ de coordonnées (x_1,x_2,x_3). On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}\in\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-2\mathrm{I}_3) &\iff (\mathrm{A}-2\mathrm{I}_3)\mathrm{X}=0\\
&\iff \left\{\begin{aligned} -3x_2+3x_3&=0\\ -3x_1+x_2-4x_3&=0\\ -3x_1+4x_2-7x_3&=0\end{aligned}\right.\\
\mathrm{X}\in\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-2\mathrm{I}_3) &\iff \left\{\begin{aligned} x_2&=x_3\\ x_1&=-x_2\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-2\mathrm{I}_3)=\mathrm{Vect}\,\left({}^t(-1,1,1)\right)}$