Mines Maths 2 PC 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benoît Landelle (Doctorant en mathématiques) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (ENS Cachan) et Paul Pichaureau (Professeur en CPGE).

Ce sujet d'analyse porte sur l'étude de certaines propriétés de la série de fonctions

$$\mathrm{S}_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha} \qquad \text{avec} \qquad \alpha > 0$$

Il est constitué de deux parties indépendantes.

- L'enjeu de la première partie est d'établir une nouvelle écriture de S_α à l'aide d'une série entière et de fonctions trigonométriques élémentaires. On emploie des résultats de continuité pour les séries de fonctions, ainsi que des techniques habituelles sur les intégrales généralisées : méthodes de comparaison et théorèmes d'interversion série/intégrale et limite/série. Les cinq premières questions sont très classiques et ne présentent pas de grandes difficultés. La mise en œuvre des théorèmes d'interversion est plus délicate et impose de bien comprendre le comportement des suites de fonctions pour cibler les contraintes satisfaites et choisir les théorèmes à employer.
- La seconde partie propose d'étudier le comportement asymptotique des coefficients intervenant dans la nouvelle écriture de S_α. On travaille les relations de négligeabilité, l'usage des quantificateurs, les méthodes de changement de variable et les équivalents. Cette partie est sans doute moins intuitive que la première. Le maniement des quantificateurs est toujours quelque peu aride mais l'énoncé constitue un bon fil conducteur. Les transformations d'intégrales par changement de variable sont très classiques et la partie se termine par des questions sur les équivalents qui sont tout à fait abordables.

Ce sujet est de taille et de difficulté raisonnables. Il présente un large éventail des techniques autour du calcul intégral et des séries de fonctions. Les deux parties de l'énoncé forment un ensemble cohérent et amènent à des résultats intéressants sur la série S_α. Il s'agit d'un très bon entraînement pour l'épreuve d'analyse.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Indications

I. Deux représentations de S_α

1 Vérifier que la série de fonctions S_α converge normalement.

2 Utiliser le critère des équivalents aux bornes de l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

3 Identifier dans l'expression de R_N la somme des termes d'une suite géométrique.

5 Développer l'expression de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{R}_\mathrm{N}(t,u)\,\mathrm{d}t$ et faire apparaître $\Gamma(\alpha)$ par un changement de variable.

6 Calculer les parties imaginaires dans l'égalité (2) évaluée en $u = e^{ix}$.

7 Faire apparaître la fraction $\dfrac{1}{1-\dfrac{u}{\mathrm{ch}\ t}}$ et écrire son développement en série.

8 Considérer la norme infinie de $h_n(\mathrm{M}) = u^n \displaystyle\int_0^{\mathrm{M}} \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\ t)^{n+1}}$.

II. Comportement asymptotique

10 Traduire la condition (5) avec des quantificateurs.

11 Utiliser l'inégalité triangulaire et faire apparaître les termes $e^{-(n-1)\delta}$.

12 Additionner les relations établies aux questions 10 et 11. Traduire avec des quantificateurs le fait que

$$\frac{\mathrm{C}(\delta)}{a\Gamma(\lambda)} n^\lambda e^{-(n-1)\delta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

13 Utiliser les changements de variable $x = \mathrm{ch}\ t$, puis $x = e^s$.

14 Écrire le développement limité de e^s à l'ordre 1 et l'appliquer à l'expression de $\mathrm{B}(s)$.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

I. Deux représentations de S_α

1 Soit $\alpha > 1$. Introduisons la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}.$$

Vérifions la convergence normale de la série $\sum u_n$ pour la norme infinie sur $\mathbb{R}$.

On a la relation $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|u_n\|_\infty = \frac{1}{n^\alpha}.$$

La série $\sum 1/n^\alpha$ est la série de référence dite de Riemann qui est convergente pour tout $\alpha > 1$. Ainsi, la série $\sum u_n$ est normalement convergente. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues, d'après le théorème de continuité d'une série de fonctions continues normalement convergente, la série $\sum u_n$ est continue, c'est-à-dire

$$\boxed{\text{Pour tout } \alpha > 1, \text{ la fonction } S_\alpha \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

> Il est fondamental de connaître la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ en fonction du paramètre α. On rappelle ce résultat majeur :
>
> $$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1}$$

2 Pour tout $t > 0$, on a $e^t > 1$. Comme u est un réel de $]-1\,;1\,[$, il s'ensuit que $e^t - u$ est strictement positif ce qui assure que $J(t) = t^{\gamma-1}/(e^t - u)$ est bien définie et clairement positive. Par ailleurs, J est une fonction continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$ comme produit de fonctions continues. Elle est donc intégrable sur tout segment strictement inclus dans $]\,0\,;+\infty\,[$. Il reste à étudier son comportement en 0 et $+\infty$. La fonction J est intégrable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ si et seulement si elle est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ et sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

- En 0 : on a l'équivalent $J(t) \sim t^{\gamma-1}/(1-u)$ et par suite J est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ si et seulement si $\gamma - 1 > -1$, c'est-à-dire $\gamma > 0$.
- En $+\infty$: on a $J(t) \sim t^{\gamma-1}e^{-t} = o(e^{-t/2})$, ce qui implique que J est intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$ quelque soit γ.

Ainsi, on conclut que

$$\boxed{\text{La fonction J est intégrable sur }]\,0\,;+\infty\,[\text{ si et seulement si } \gamma > 0.}$$

3 Signalons une petite erreur dans l'énoncé : vu que $\alpha > 0$, la quantité $R_N(t,u)$ est définie pour $t > 0$ et non pour $t \geqslant 0$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $t > 0$, on identifie, dans l'expression de $R_N(t,u)$, la somme des termes d'une suite géométrique de raison ue^{-t} qu'on peut écrire sous la forme

$$\sum_{n=0}^{N-1} (ue^{-t})^n = \frac{1-(ue^{-t})^N}{1-ue^{-t}} = e^t\,\frac{1-u^Ne^{-Nt}}{e^t - u}$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Il en découle
$$\mathrm{R_N}(t,u)=\left(\frac{u}{e^t-u}-u\,\frac{1-u^{\mathrm{N}}e^{-\mathrm{N}t}}{e^t-u}\right)t^{\alpha-1}$$

et par suite
$$\boxed{\forall t>0 \qquad \mathrm{R_N}(t,u)=\frac{u^{\mathrm{N}+1}e^{-\mathrm{N}t}t^{\alpha-1}}{e^t-u}}$$

4 D'après le résultat de la question 3 et comme on a l'inégalité
$$\forall t>0 \qquad e^{-\mathrm{N}t}\leqslant 1$$
en fixant $\gamma=\alpha$, on obtient la majoration
$$\forall t>0 \qquad |\mathrm{R_N}(t,u)|\leqslant \frac{t^{\alpha-1}}{e^t-u}|u|^{\mathrm{N}+1}=\mathrm{J}(t)\,|u|^{\mathrm{N}+1}$$

Puisque $\alpha>0$, on déduit de la question 2, d'une part, que la fonction $t\mapsto \mathrm{R_N}(t,u)$ est intégrable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et d'autre part, l'inégalité
$$\left|\int_0^{+\infty}\mathrm{R_N}(t,u)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{J}(t)\,\mathrm{d}t\right)|u|^{\mathrm{N}+1}$$
Enfin, comme le réel u appartient à l'intervalle $]-1\,;1\,[$, on a $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty}|u|^{\mathrm{N}+1}=0$ et

par encadrement
$$\boxed{\forall u\in\,]-1\,;1\,[\qquad \lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{R_N}(t,u)\,\mathrm{d}t=0}$$

5 Par définition de $\mathrm{R_N}(t,u)$, on peut écrire
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{R_N}(t,u)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left(\frac{ut^{\alpha-1}}{e^t-u}-ue^{-t}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}(ue^{-t})^k t^{\alpha-1}\right)\mathrm{d}t$$
Les différents termes sous l'intégrale de droite sont intégrables sur $]\,0\,;+\infty\,[$. En effet, le premier terme est l'application $t\mapsto u\,\mathrm{J}(t)$ avec $\gamma=\alpha>0$ qui est intégrable d'après le résultat de la question 2. Le second terme est la différence $u\,\mathrm{J}(t)-\mathrm{R_N}(t,u)$, qui est intégrable en tant que différence de fonctions intégrables. Ensuite, par linéarité de l'intégrale, il vient
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\mathrm{R_N}(t,u)\,\mathrm{d}t&=\int_0^{+\infty}\frac{ut^{\alpha-1}}{e^t-u}\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}ue^{-t}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}(ue^{-t})^k t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\frac{ut^{\alpha-1}}{e^t-u}\,\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}u^{k+1}\int_0^{+\infty}e^{-(k+1)t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

> C'est une erreur classique d'appliquer la linéarité de l'intégrale sans avoir vérifier l'intégrabilité des différents termes.

Le changement d'indice $n=k+1$ dans la somme amène à l'égalité suivante
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{R_N}(t,u)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{ut^{\alpha-1}}{e^t-u}\,\mathrm{d}t-\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}u^n\int_0^{+\infty}e^{-nt}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$$
Puis, le changement de variable $s=nt$ permet d'obtenir
$$\forall n\in[\![\,1\,;\mathrm{N}\,]\!] \qquad \int_0^{+\infty}e^{-nt}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-s}\left(\frac{s}{n}\right)^{\alpha-1}\frac{ds}{n}=\frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha}$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .