Mines Maths 1 PC 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par David Lecomte (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Les sujets de concours sur les pseudo-inverses de matrices, classiques il y a une dizaine d'années, n'avaient pas reparu depuis. Ils reviennent apparemment au goût du jour avec ce problème d'algèbre linéaire des Mines.

Cet énoncé présente aussi l'originalité de construire sur le problème des Mines MP de la session 2006, dans lequel on étudie les éléments propres des matrices stochastiques strictement positives. Ces dernières sont les matrices à coefficients strictement positifs et dont la somme sur chaque ligne est égale à 1. L'année dernière, vos collègues de MP devaient montrer une version du théorème de Perron-Frobenius : une telle matrice P admet 1 comme valeur propre simple et on peut y associer un unique vecteur propre X_∞ qui soit stochastique strictement positif.

L'objectif de notre problème est d'étudier les liens entre matrices stochastiques et pseudo-inverses, dans le but d'identifier ce vecteur X_∞. On procède en trois étapes.

- Dans un premier temps, on étudie des normes sur les espaces de matrices, particulièrement adaptées aux matrices stochastiques positives ;
- Puis on s'intéresse à la notion de pseudo-inverse définie par l'énoncé en introduction. En particulier, on caractérise les matrices qui admettent un pseudo-inverse et on montre que dans ce cas, le pseudo-inverse est unique ;
- On arrive enfin au but du problème. Plus précisément, on montre que : étant donnée une matrice $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ stochastique strictement positive, la matrice $A = I_n - P$ admet un pseudo-inverse A'. Et si, par chance, on met la main sur A', alors $I_n - AA'$ est une matrice dont toutes les lignes sont égales au vecteur X_∞ que l'on cherche.

Cette épreuve est assurément un très bon problème, de difficulté moyenne, pour réviser le programme d'algèbre linéaire. L'emphase est mise sur le programme de première année de CPGE, car la partie du programme sur la réduction de matrices y a une place très marginale. Le problème permet donc de voir si le candidat est à l'aise avec la dualité entre matrices et applications linéaires, la manipulation de matrices (produits et sommes), et l'utilisation des principaux résultats dans les espaces de dimension finie.

Indications

I. Préliminaires

1 Utiliser la définition du produit matriciel et l'inégalité triangulaire pour majorer $\left|(\mathrm{MN})(i,j)\right|$. Puis sommer sur j et intervertir les sommes. La fin consiste simplement à utiliser la définition de la norme.

3 Procéder par récurrence.

II. Pseudo-inverse

4 Se rappeler que si u et v sont des endomorphismes d'un espace vectoriel, alors $\operatorname{Im}(uv) \subset \operatorname{Im} u$. Utiliser ceci pour montrer d'abord que $\operatorname{rang} a^2 \leqslant \operatorname{rang} a$; puis, conjointement aux propriétés que possèdent a et un pseudo-inverse, pour obtenir $\operatorname{rang} a \leqslant \operatorname{rang} a^2$.

5 Montrer d'abord que $\operatorname{Im} a = \operatorname{Im} a^2$. Puis en déduire que $\operatorname{Ker} a + \operatorname{Im} a = \mathbb{R}^n$. Conclure à l'aide du théorème du rang.

6 Se placer dans une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} a \oplus \operatorname{Ker} a$. Le rang de B est égal au rang de A.

7 Vérifier que $\mathrm{W}\begin{pmatrix} \mathrm{B}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{W}^{-1}$ est un pseudo-inverse de A.

8 Travailler dans la base utilisée à la question 6.

9 Montrer d'abord que $\operatorname{Ker}(aa') = \operatorname{Ker} a$; une inclusion est toujours vraie. L'autre utilise la relation (**2**) satisfaite par A du fait qu'elle admet un pseudo-inverse. En couplant ceci au théorème du rang, établir que $\operatorname{Im}(aa') = \operatorname{Im} a$.

10 Vérifier que D, mis en évidence à la question 8, n'est autre que B^{-1}.

III. Calcul de X_∞

12 Montrer que $2\mathrm{P} - \mathrm{P}^2$ est stochastique. Compte tenu du fait que $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n - \mathrm{P}$ et $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n - (2\mathrm{P} - \mathrm{P}^2)$, montrer que a et a^2 ont le même noyau, à l'aide du **théorème 1** donné par l'énoncé. En déduire que $\operatorname{Ker} a_c = \operatorname{Ker} a_c^2$; conclure.

13 Le théorème du rang et le **théorème 1** de l'introduction permettent de calculer la valeur commune de $\operatorname{rang} a$ et $\operatorname{rang} a^2$.

14 Poser $\mathrm{D} = \mathrm{I}_n - \mathrm{C}$ et calculer $\left(\sum\limits_{j=0}^{k-1} (\mathrm{I}_n - \mathrm{C})^j\right)\mathrm{C}$ en écrivant C en fonction de D.

15 Se servir des résultats de la partie II pour écrire A et A' sous forme de matrices par blocs. La matrice B est inversible donc le calcul de la question 14 peut être appliqué à $\mathrm{I}_n - \mathrm{B}$. Ne pas oublier, d'ailleurs, que $\mathrm{P} = \mathrm{I}_n - \mathrm{A}$.

16 Les résultats de la première partie sont utiles pour majorer $\|(\mathrm{I}_n - \mathrm{P}^k)\mathrm{A}'\|$.

17 Les matrices A et A' commutent donc $\mathrm{I}_n - \mathrm{AA}' = \mathrm{I}_n - \mathrm{A}'\mathrm{A}$. Se rappeler que A s'écrit en fonction de P, qui est stochastique.

18 Appliquer le **théorème 1**, qui donne une manière de calculer X_∞ à partir d'un X quelconque dans $\mathcal{K}_n$. Prendre, pour X, le vecteur ligne dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en i^{e} position qui vaut 1.

I. Préliminaires

1 Soient $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{K})$. Rappelons la formule définissant le produit matriciel : MN appartient à $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et

$$\forall (i,j) \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!] \times [\![\, 1\,;\, m \,]\!] \qquad (\mathrm{MN})(i,j) = \sum_{k=1}^{r} \mathrm{M}(i,k)\,\mathrm{N}(k,j)$$

Donc $$\|\mathrm{MN}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{m} \big|(\mathrm{MN})(i,j)\big| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{m} \Big|\sum_{k=1}^{r} \mathrm{M}(i,k)\,\mathrm{N}(k,j)\Big|$$

Soit $i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall j \in [\![\, 1\,;\, m \,]\!] \qquad \Big|\sum_{k=1}^{r} \mathrm{M}(i,k)\,\mathrm{N}(k,j)\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{r} |\mathrm{M}(i,k)|\,|\mathrm{N}(k,j)|$$

d'où $$\sum_{j=1}^{m}\Big|\sum_{k=1}^{r} \mathrm{M}(i,k)\,\mathrm{N}(k,j)\Big| \leqslant \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} |\mathrm{M}(i,k)|\,|\mathrm{N}(k,j)|$$

Commençons par intervertir ces deux sommes finies :

$$\sum_{j=1}^{m}\Big|\sum_{k=1}^{r} \mathrm{M}(i,k)\,\mathrm{N}(k,j)\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{r}\underbrace{\sum_{j=1}^{m} |\mathrm{M}(i,k)|\,|\mathrm{N}(k,j)|}_{(\mathbf{S})}$$

Dans la somme $(\mathbf{S})$, les termes $\mathrm{M}(i,k)$ sont indépendants de l'indice de sommation, qui est j, ce qui permet de les mettre en facteur :

$$\sum_{j=1}^{m}\Big|\sum_{k=1}^{r} \mathrm{M}(i,k)\,\mathrm{N}(k,j)\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{r} |\mathrm{M}(i,k)| \sum_{j=1}^{m} |\mathrm{N}(k,j)|$$

Puis, par définition de $\|\mathrm{N}\|$, on a

$$\forall k \in [\![\, 1\,;\, r \,]\!] \qquad \sum_{j=1}^{m} |\mathrm{N}(k,j)| \leqslant \|\mathrm{N}\|$$

d'où $$\sum_{j=1}^{m}\Big|\sum_{k=1}^{r} \mathrm{M}(i,k)\,\mathrm{N}(k,j)\Big| \leqslant \|\mathrm{N}\| \sum_{k=1}^{r} |\mathrm{M}(i,k)| \leqslant \|\mathrm{N}\|\,\|\mathrm{M}\|$$

Cette inégalité est valable pour tout $i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]$. On conclut donc

$$\boxed{\|\mathrm{MN}\| \leqslant \|\mathrm{M}\|\,\|\mathrm{N}\|}$$

2 P est une matrice stochastique de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, ce qui signifie que $\mathrm{PJ}_n = \mathrm{J}_n$. Autrement dit, puisque J_n est la matrice colonne dont tous les coefficients valent 1,

$$\forall i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!] \qquad (\mathrm{PJ}_n)(i,1) = 1$$

En exprimant le terme général de PJ_n à l'aide de la définition du produit matriciel,

$$\forall i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!] \qquad \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(i,k) = 1$$

P est positive donc chacun de ses coefficient est positif, égal à sa valeur absolue, d'où

$$\forall i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!] \qquad \sum_{k=1}^{n} |\mathrm{P}(i,k)| = 1$$

Par suite, $$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{k=1}^{r}|\mathrm{P}(i,k)|=1$$

Autrement dit, $$\boxed{\|\mathrm{P}\|=1}$$

3 On définit, pour tout entier k non nul, la propriété $\mathscr{Q}(k)$: « P^k est une matrice stochastique. »

- $\underline{\mathscr{Q}(1)}$ est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathscr{Q}(k)\Longrightarrow\mathscr{Q}(k+1)}$: P^k et P sont stochastiques. Alors
$$\mathrm{P}^{k+1}\mathrm{J}_n=\mathrm{P}^k(\mathrm{P}\mathrm{J}_n)=\mathrm{P}^k\mathrm{J}_n=\mathrm{J}_n$$
En outre, d'après la formule définissant le produit matriciel, les coefficients de P^{k+1} sont des sommes de produits de coefficients de P et P^k. Ces deux matrices étant à coefficients positifs, P^{k+1} est également à coefficients positifs. C'est donc une matrice stochastique et $\mathscr{Q}(k+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\mathscr{Q}(k)$ est vraie pour tout entier k non nul.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } k \text{ non nul, } \mathrm{P}^k \text{ est stochastique.}}$$

II. Pseudo-inverse

4 Supposons que A admet un pseudo-inverse A′. Notons a' l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A′. Les relations matricielles entre A et A′ se traduisent en termes d'endomorphismes de la manière suivante :

$$aa'=a'a \qquad a=aa'a \qquad \text{et} \qquad a'=a'aa'$$

> Rappelons la relation suivante, triviale, qui peut être considérée comme du cours : si f et g sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E, alors $\mathrm{Im}\,(fg)\subset\mathrm{Im}\,f$. Cela tient simplement au fait que
> $$\mathrm{Im}\,(fg)=fg(\mathrm{E})=f(g(\mathrm{E}))\subset f(\mathrm{E})=\mathrm{Im}\,f$$
> Si E est, de plus, de dimension finie, on a $\mathrm{rang}\,(fg)\leqslant\mathrm{rang}\,f$ puisque le rang d'une application linéaire est la dimension de son image.

Les deux premières relations donnent $a=a^2a'$. D'après la formule rappelée en remarque, $\mathrm{rang}\,a=\mathrm{rang}\,(a^2a')\leqslant\mathrm{rang}\,a^2$. Mais on a aussi $a^2=a\circ a$ donc, toujours d'après cette formule, $\mathrm{rang}\,a^2\leqslant\mathrm{rang}\,a$. Par suite,

$$\boxed{\text{Si A admet un pseudo-inverse, alors } a \text{ et } a^2 \text{ ont le même rang.}}$$

5 Observons d'abord que $\mathrm{Im}\,a=\mathrm{Im}\,a^2$. En effet, l'inclusion $\mathrm{Im}\,a^2\subset\mathrm{Im}\,a$ est triviale ; de plus, d'après la question précédente, ces deux sous-espaces ont la même dimension, à savoir $\mathrm{rg}\,a$.