Centrale Maths 2 PC 2007— Corrigé

Ce corrigé est proposé par Rafik Imekraz (ENS Cachan) ; il a été relu par Paul Pichaureau (Professeur en CPGE) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

L'épreuve se compose de trois parties.

- La première partie considère un sous-ensemble quelconque Γ du K-espace vectoriel K^n ($\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), un polynôme P de degré au moins 1, et s'intéresse aux propriétés de l'ensemble

$$\mathrm{R}_{\Gamma,\mathrm{P}} = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{K}^n \mid (\mathrm{P}(x_1),\ldots,\mathrm{P}(x_n)) \in \Gamma\}$$

  On établit que si $\mathrm{K} = \mathbb{R}$, alors le caractère borné de Γ implique celui de $\mathrm{R}_{\Gamma,\mathrm{P}}$; si le corps de base est $\mathbb{C}$, c'est une équivalence.

- La deuxième partie introduit un endomorphisme f diagonalisable sur un K-espace vectoriel V de dimension finie ($\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On montre que l'on peut écrire f sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i$$

  où les applications p_i sont des projecteurs et les λ_i les valeurs propres de f. Puis, étant donné un polynôme $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$, cette décomposition est utilisée pour l'étude de l'ensemble

$$\mathrm{R}_{f,\mathrm{P}} = \{g \in \mathscr{L}(\mathrm{V}) \mid \mathrm{P}(g) = f\}$$

  Si $\mathrm{P} = \mathrm{X}^r$, on montre notamment que cet ensemble est fini si et seulement si les valeurs propres de f sont simples, et son cardinal est alors calculé.

- Dans la dernière partie, l'espace V est supposé euclidien et l'étude précédente est reprise pour un endomorphisme f orthogonal ou symétrique. La recherche s'oriente naturellement vers les éléments orthogonaux ou symétriques de $\mathrm{R}_{f,\mathrm{P}}$.

Le sujet est long. Les questions de fin de partie le sont d'autant plus qu'elles comportent souvent plusieurs sous-questions. Les trois parties sont globalement indépendantes, sauf pour les questions finales qui nécessitent les résultats des parties précédentes.

Indications

Partie I

I.A.1 Utiliser la définition d'une application linéaire.

I.A.2 Appliquer d'abord la question précédente puis utiliser la définition de la multiplication de E.

I.A.3 Il suffit de montrer qu'un élément du noyau a plus de racines que son degré. Pour la dimension, penser au théorème du rang.

I.B.1 Utiliser le théorème de d'Alembert-Gauss.

I.B.2 Penser à un polynôme dont la fonction associée n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$.

I.B.3 Calculer le cardinal des composantes coordonnées des vecteurs de $\mathrm{R}_{y,\mathrm{P}}$.

I.B.4 Même indication qu'à la question précédente.

I.C.1 Expliciter des équations des ensembles $\mathrm{R}_{y,\mathrm{P}}$.

I.C.2 Faire comme à la question précédente.

I.C.3 Expliciter une équation de l'ensemble $\mathrm{R}_{y,\mathrm{P}}$. Penser à factoriser $\mathrm{P}(x) - \mathrm{P}(y)$.

I.D.1 Remarquer que $\mathrm{R}_{\Gamma,\mathrm{P}} = \cup_{y\in\Gamma}\mathrm{R}_{y,\mathrm{P}}$ et utiliser la question I.B.4.

I.D.2 Pour le premier point, faire une démonstration par l'absurde, et montrer que si Γ est borné et si $\mathrm{R}_{\Gamma,\mathrm{P}}$ ne l'est pas, alors il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que pour tout réel $\mathrm{K} > 0$ il existe un scalaire a de module supérieur à K tel que $|\mathrm{P}(a)| \leqslant \mathrm{M}$. Pour le deuxième point, essayer $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2$. Enfin, se rappeler que l'image d'un disque fermé de $\mathbb{C}$ par un polynôme est une partie bornée de $\mathbb{C}$.

Partie II

II.A.1 On pourra montrer que la famille $(p_1, \ldots, p_n)$ est libre. Pour la stabilité par la composition, on pourra utiliser la bilinéarité de $\circ$.

II.A.2 Utiliser la définition de la linéarité. Montrer que Ψ est injective, puis utiliser le fait que K^n et E sont de même dimension. Faire un calcul pour prouver la formule $\Psi(x \times y) = \Psi(x) \circ \Psi(y)$.

II.A.3 Remarquer que $\Psi(x^k) = \Psi(x)^k$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ et pour tout entier naturel k, puis utiliser un argument de linéarité.

II.B.2 Utiliser la question précédente avec des polynômes particuliers.

II.B.3 Montrer à l'aide de la question II.B.1 que f annule un polynôme scindé à racines simples.

II.C.1 Utiliser les n projecteurs associés à la somme directe des sous-espaces propres de f.

II.C.2 Utiliser le fait que g induit un endomorphisme diagonalisable de V_j, puis appliquer à un vecteur de V_j l'égalité $f \circ g = g \circ f$.

II.C.3 Pour l'inclusion, utiliser la question II.A.3 et remarquer que $f = \Psi(\lambda)$. Pour l'égalité, constater que l'endomorphisme induit par g sur V_j est une homothétie quel que soit $j \in [\![1\,;n]\!]$. En notant son rapport μ_j, comparer g et $\Psi((\mu_1, \ldots, \mu_n))$.

II.C.4 Lorsque $\mathrm{N} = 2$, montrer qu'il existe une infinité de matrices A qui vérifient la relation $\mathrm{A}^r = \mathrm{I}_2$. Traiter le cas $\mathrm{N} \geqslant 3$ à l'aide du cas $\mathrm{N} = 2$ et de calculs par blocs.

II.C.5 Introduire le polynôme $\prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X}^r - \lambda_i)$, puis raisonner en termes de matrices et utiliser le dernier résultat de la question II.C.2.

II.D Calculer un polynôme caractéristique. Utiliser la question II.C.1 puis la question II.C.3.

Partie III

III.A.1 Pour tous endomorphismes f et g on a la relation $(f \circ g)^\star = g^\star \circ f^\star$.

III.A.2 Appliquer le théorème de diagonalisation en base orthonormée des endomorphismes symétriques (parfois nommé théorème spectral).

III.A.3 Utiliser la même méthode qu'à la question précédente.

III.A.4 Pour l'équation $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$, appliquer le théorème spectral et montrer que A est diagonalisable à valeurs propres simples. Utiliser la question II.C.3 pour connaître le nombre de matrices solutions, puis calculer la matrice A^2. Réutiliser ce calcul pour l'équation $\mathrm{B}^3 = \mathrm{A}$ avec B symétrique. Faire enfin appel au résultat de la question précédente.

III.B.2 Rappeler pourquoi $g(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$ puis considérer un élément u de $\mathrm{F}^\perp$ et montrer que

$$\forall w \in \mathrm{F} \quad \langle g(u), w \rangle = 0$$

III.B.3 Un automorphisme orthogonal d'un plan orienté est soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle, soit une rotation.

III.B.4 Calculer un polynôme caractéristique, puis appliquer la même méthode qu'à la question II.D.

III.C.1 Justifier que $\mathrm{F}^\perp$ est stable par g, et appliquer le déterminant de $\mathscr{L}(\mathrm{F}^\perp)$ à la relation

$$\left(g_{|\mathrm{F}^\perp}\right)^r = -\mathrm{id}_{\mathrm{F}^\perp}$$

III.C.2 Utiliser les résultats des questions III.A.3 et III.A.2 en séparant les cas r pair et r impair.

III.D.1 Raisonner encore avec les matrices. Montrer qu'une matrice d'un élément de $\mathrm{O(V)} \cap \mathrm{R}_r(f)$ est nécessairement de la forme

$$\mathrm{G} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

où A est une matrice orthogonale d'ordre 2 et $\varepsilon = \pm 1$.

III.D.2 Procéder de la même façon qu'à la question précédente.

III.D.3 Utiliser des matrices.

Première Partie

I.A.1 Utilisons la définition de la linéarité : pour tous polynômes P et Q et tous scalaires a et b,

$$\begin{aligned}\Phi(a\mathrm{P}+b\mathrm{Q}) &= (a\mathrm{P}(x_1)+b\mathrm{Q}(x_1),\ldots,a\mathrm{P}(x_n)+b\mathrm{Q}(x_n))\\ &= a(\mathrm{P}(x_1),\ldots,\mathrm{Q}(x_n))+b(\mathrm{Q}(x_1),\ldots,\mathrm{Q}(x_n))\\ \Phi(a\mathrm{P}+b\mathrm{Q}) &= a\Phi(\mathrm{P})+b\Phi(\mathrm{Q})\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{L'application } \Phi \text{ est linéaire.}}$

De même, $\forall \mathrm{P},\mathrm{Q}\in\mathbb{K}[\mathrm{X}]$
$$\begin{aligned}\Phi(\mathrm{PQ}) &= (\mathrm{PQ}(x_1),\ldots,\mathrm{PQ}(x_n))\\ &= (\mathrm{P}(x_1)\mathrm{Q}(x_1),\ldots,\mathrm{P}(x_n)\mathrm{Q}(x_n))\\ &= (\mathrm{P}(x_1),\ldots,\mathrm{P}(x_n))\times(\mathrm{Q}(x_1),\ldots,\mathrm{Q}(x_n))\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall \mathrm{P},\mathrm{Q}\in\mathrm{K}[\mathrm{X}]\qquad \Phi(\mathrm{PQ})=\Phi(\mathrm{P})\times\Phi(\mathrm{Q})}$$

I.A.2 A_x étant l'image de l'application linéaire Φ,

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{A}_x \text{ est un sous-espace vectoriel de E.}}$$

Montrons la stabilité de A_x par multiplication. Si u et v sont deux éléments de A_x, il existe par définition P et Q deux polynômes tels que $u=\Phi(\mathrm{P})$ et $v=\Phi(\mathrm{Q})$. Alors
$$u\times v=\Phi(\mathrm{P})\times\Phi(\mathrm{Q})=\Phi(\mathrm{PQ})$$
Or, PQ est un polynôme, donc $u\times v\in\mathrm{Im}\ \Phi$, d'où $u\times v\in\mathrm{A}_x$.

Par conséquent $\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{A}_x \text{ est stable par multiplication.}}$

> Il est souvent utile d'interpréter des sous-ensembles d'un espace vectoriel comme des noyaux ou des images d'applications linéaires pour montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels.

I.A.3 Notons $\Phi_{|\mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}]}$ la restriction de Φ à $\mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Comme Φ est linéaire, l'application $\Phi_{|\mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}]}$ l'est également. Soit $\mathrm{P}\in\mathrm{Ker}\ \Phi_{|\mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}]}$. On a
$$\Phi(\mathrm{P})=(\mathrm{P}(x_1),\mathrm{P}(x_2),\ldots,\mathrm{P}(x_n))=(0,0,\ldots,0)$$
d'où
$$\forall i\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]\quad \mathrm{P}(x_i)=0$$
Les nombres x_i étant deux à deux distincts, P admet n racines distinctes. Comme son degré est inférieur à $n-1$, il est nul.

$$\boxed{\text{La restriction de } \Phi \text{ à } \mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}] \text{ est injective.}}$$

Utilisons maintenant le théorème du rang :
$$\dim\mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}]=\mathrm{rg}\ \Phi_{|\mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}]}+\dim\mathrm{Ker}\ \Phi_{|\mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}]}$$
donc
$$n=\dim\Phi(\mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}])$$