Centrale Maths 1 PC 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Denis Conduché (ENS Ulm) ; il a été relu par Benoît Chevalier (ENS Ulm) et Jean Starynkévitch (Professeur en CPGE).

L'épreuve se compose de quatre parties dépendantes les unes des autres. L'objectif est de démontrer une version analytique du *théorème central limite*, bien connu en probabilités, en utilisant abondamment la transformation de Laplace.

- Dans la première partie, on montre quelques résultats concernant la fonction gaussienne $f : x \longmapsto 1/\sqrt{2\pi}e^{-x^2/2}$, qui serviront pour toute la suite. On calcule en particulier sa transformée de Laplace $\widehat{f}$ à la question I.B.
- La partie II s'intéresse à l'ensemble E des fonctions dominées par f (à une homothétie sur l'axe des x près). Après avoir observé quelques propriétés de cet ensemble (stabilité par combinaison linéaire et par une loi classique de composition appelée produit de convolution), on passe à l'étude de la transformée de Laplace des éléments de E. On calcule les dérivées première et seconde de $\widehat{u}$, puis le comportement du produit de convolution vis-à-vis de la transformée de Laplace.
- La partie III démontre le théorème central limite dans deux cas particuliers. On s'intéresse pour cela aux suites de fonctions obtenues en convolant n fois une fonction h avec elle-même. La première suite est bâtie sur la fonction f ; on calcule explicitement chacun de ses termes. On examine ensuite une suite construite sur une fonction g nulle en dehors d'un segment. Dans chacun des cas, on calcule la limite de la suite $\widehat{h_n}\,(t/\sqrt{n})$, à t fixé, lorsque n tend vers l'infini.
- Dans la partie IV, il s'agit de démontrer le théorème central limite dans un cas un peu plus général, les objets étudiés étant toujours les suites de fonctions de la partie précédente.

Ce sujet fait intervenir plusieurs fois les théorèmes de convergence dominée. Les calculs sont ici et là techniques, mais sans difficulté théorique majeure.

Indications

Partie I

I.A.1 Comparer la croissance de $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.

I.A.2 Reconnaître une dérivée.

I.A.3 Faire une intégration par parties pour la relation de récurrence.

I.B Se ramener à la fonction f, à un changement de variable près.

Partie II

II.A Utiliser le sens de variation de $\lambda \mapsto f(\lambda x)$ pour conclure.

II.B.2 Faire le changement de variable $t' = x - t$.

II.B.3 Se ramener à l'intégrale de la question I.B.

II.B.4 Exprimer $f * f$ en fonction de f.

II.C.1 Même indication qu'à la question II.B.3.

II.C.2 Appliquer un théorème de dérivation sous l'intégrale.

II.D.1 Récrire l'inégalité comme une fonction (de deux variables) à minorer, puis se ramener à une fonction d'une seule variable.

II.D.2 Intervertir les deux intégrales. Pour trouver la majoration de la fonction $(x,t) \mapsto u(t)v(x-t)$, utiliser le résultat de la question II.D.1.

II.D.3 Adapter la majoration obtenue lors de la démonstration du résultat de la question II.D.2, puis utiliser le résultat de la fonction I.B.

Partie III

III.A.1 Utiliser le résultat de la question II.D.2.

III.A.2 Se servir du résultat de la question II.D.3.

III.B.1 Utiliser le résultat de la question II.B.3.

III.B.2 Utiliser une récurrence, en procédant de la même façon que lors de la réponse à la question II.B.3.

III.B.3 Utiliser le résultat de la question III.A.2.

III.C.1 Pour montrer que g est un élément de E, il suffit d'utiliser le fait que cette fonction est nulle en dehors d'un segment.

III.C.2 Étudier le domaine sur lequel on intègre.

III.C.3 Procéder de la même façon que pour la réponse à la question précédente, mais avec une récurrence en plus.

III.C.4 Faire deux intégrations par parties.

III.C.5 Utiliser le logarithme.

Partie IV

IV.A.1 Utiliser la réponse à la question II.C.2.

IV.A.2 Se servir du résultat de la question III.A.2.

IV.B Suivre la même démarche que pour la réponse à la question III.C.5.

Partie I

I.A.1 Soit n un entier naturel fixé. Montrons que l'intégrale $m_n(f)$ est absolument convergente, c'est-à-dire que la fonction $g_n : x \longmapsto |x^n f(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

La fonction g_n est paire, il suffit donc d'étudier la convergence au voisinage de $+\infty$. Par croissance comparée, la fonction $x \longmapsto x^{n+2} f(x)$ a une limite nulle en $+\infty$, donc g_n est négligeable devant $1/x^2$ en l'infini. Or, la fonction $x \longmapsto 1/x^2$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, de sorte que la fonction g_n est intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

La fonction g_n est intégrable sur l'intervalle $]\,-\infty\,;0\,]$ par parité.

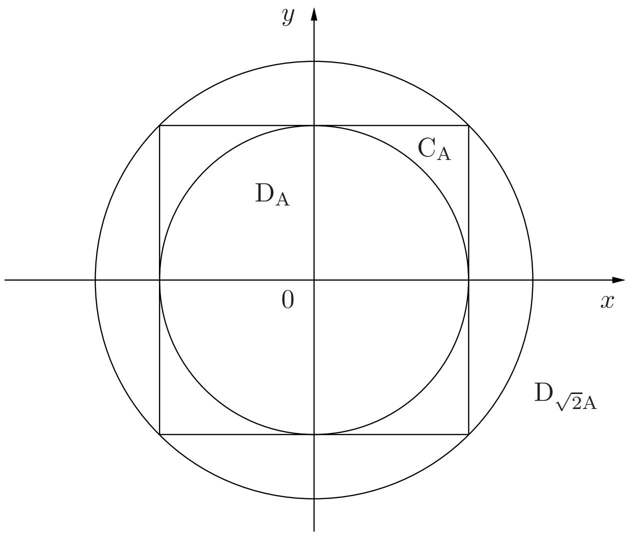
$$\boxed{\text{La fonction } x \longmapsto x^n f(x) \text{ est donc intégrable sur } \mathbb{R}.}$$

I.A.2 L'intégrale de $x \longmapsto x f(x)$ converge d'après le résultat de la question I.A.1. La fonction $x \longmapsto x e^{-x^2/2}$ est la dérivée de la fonction $x \longmapsto -e^{-x^2/2}$.

$$m_1(f) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Par conséquent, $$\boxed{m_1(f) = 0}$$

> Le calcul de $m_0(f)$ est un calcul classique. La méthode la plus simple consiste à passer par une intégrale double, puis à se placer en coordonnées polaires. Soit A un réel strictement positif, encadrons la valeur de l'intégrale
>
> $$\mathrm{I_A} = \int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$
>
> Le carré de cette intégrale peut être vu comme une intégrale double
>
> $$\mathrm{I_A^2} = \int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y = \iint_{[\,-\mathrm{A}\,;\mathrm{A}\,]^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
>
> En coordonnées polaires, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ et $x^2+y^2 = r^2$. Notons $\mathrm{C_A}$ l'ensemble des couples (r,θ) tels que $(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in [\,-\mathrm{A}\,;\mathrm{A}\,]^2$, il vient
>
> $$\mathrm{I_A^2} = \iint_{\mathrm{C_A}} r e^{-\frac{r^2}{2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$
>
> On reconnaît à nouveau la fonction $x \longmapsto x e^{-x^2/2}$, qui est la dérivée de la fonction $x \longmapsto -e^{-x^2/2}$. Mais le domaine d'intégration $\mathrm{C_A}$ est un carré en coordonnées cartésiennes, ce qui ne correspond à rien de simple en polaire et ne permet pas de conclure aisément. Plaçons $\mathrm{C_A}$ entre deux disques
>
> $$\mathrm{D_A} = \{(r,\theta) \mid r \leqslant \mathrm{A}\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}_{\sqrt{2}\mathrm{A}} = \{(r,\theta) \mid r \leqslant \sqrt{2}\mathrm{A}\}$$
>
> qui sont de rayons respectifs A et $\sqrt{2}$A :



La fonction intégrée est positive de sorte que

$$\iint_{D_A} r e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr\, d\theta \leqslant I_A^2 \leqslant \iint_{D_{\sqrt{2}A}} r e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr\, d\theta$$

De surcroît, le calcul de l'intégrale double sur un disque de rayon R est simple :

$$\iint_{D_R} r e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr = 2\pi \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^R = 2\pi \left(1 - e^{-\frac{R^2}{2}}\right)$$

si bien que l'encadrement de I_A^2 s'écrit

$$2\pi \left(1 - e^{-\frac{A^2}{2}}\right) \leqslant I_A^2 \leqslant 2\pi \left(1 - e^{-A^2}\right)$$

Finalement, en passant à la limite lorsque A tend vers $+\infty$, il vient $I_{+\infty}^2 = 2\pi$.

Conclusion : $$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1}$$

I.A.3 Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé. L'intégrale de $x \longmapsto x^n f(x)$ converge d'après le résultat de la question I.A.1. Faisons une intégration par parties, avec $u'(x) = x e^{-x^2/2}$ et $v(x) = x^{n-1}$.

$$\begin{aligned} m_n(f) &= \int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(x^{n-1}\right) \left(x e^{-\frac{x^2}{2}}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\left(x^{n-1}\right)\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \left((n-1) x^{n-2}\right)\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right) dx \right) \end{aligned}$$

le crochet est alors nul, ce qui donne

$$m_n(f) = (n-1) \int_{\mathbb{R}} x^{n-2} f(x)\, dx$$

Donc $$\boxed{m_n(f) = (n-1) m_{n-2}(f)}$$