CCP Maths 2 PC 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Dujardin (Chercheur INRIA) ; il a été relu par David Lecomte (Professeur en CPGE) et Tristan Poullaouec (ENS Cachan).

Cette épreuve d'analyse s'intéresse aux solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2

$$y''(x) + \varphi(x)y(x) = 0 \qquad \textbf{(E)}$$

sur des intervalles ouverts I de $\mathbb{R}$ symétriques par rapport à l'origine. φ désigne ici une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, paire, à valeurs réelles.

Ce problème se compose de trois parties.

- La première traite essentiellement quelques généralités relatives aux solutions de (E) sur I, telles que la régularité et la description de l'espace des solutions.
- La deuxième partie est consacrée aux éventuelles solutions 2π-périodiques de (E) lorsque $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ et φ est elle-même 2π-périodique. Elle offre l'occasion de revoir certains résultats de base du cours d'analyse, comme le théorème d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle linéaire résolue sur un intervalle ou encore les théorèmes assurant la continuité et la dérivabilité d'une intégrale à paramètre.
- Enfin, la troisième partie considère le cas où $\mathrm{I} = \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$ et φ est une constante strictement positive sur I. L'étude des solutions de (E) est ramenée à l'étude des solutions d'une autre équation différentielle linéaire d'ordre 2, dont on cherche les solutions développables en série entière avant de revenir à celles de (E). Comme application de ces résultats, on montre à la fin de ce problème que pour tout m appartenant à $\mathbb{N}^*$, les fonctions $x \mapsto \cos(2mx)$ et $x \mapsto \sin((2m+1)x)$ sont sur $\mathbb{R}$ des polynômes en $x \mapsto \sin(x)$ dont on précise les degrés et les coefficients.

D'une difficulté moyenne et d'une longueur raisonnable, cette épreuve permet de se confronter à plusieurs chapitres du programme d'analyse de PC sans pour autant devoir faire face à des difficultés techniques notoires : il n'y a pas de longs calculs, pas de recours à des astuces, ni même d'utilisation plus ou moins implicite de résultats hors-programme.

Indications

Partie I

I.1 On pourra montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que y est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout k.

I.2 Utiliser la parité de la fonction φ sur I.

I.3 On pourra considérer les fonctions $x \longmapsto f_0(-x)$ et $x \longmapsto -f_1(-x)$.

I.4.1 Faire apparaître le wronskien de f_0 et f_1 dans l'expression de u'.

I.4.2 Intégrer la relation montrée en I.4.1.

I.5.1 Injecter la solution dans (E) pour en déduire φ.

I.5.2 Justifier que $u_0(x) = \displaystyle\int_0^x \tan'(t)(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$ sur I.

I.5.3 Utiliser le résultat de la question I.4.3.

Partie II

II.1 Utiliser le résultat de la question I.1 et la périodicité de φ.

II.2 À l'aide des résultats des questions II.1 et I.3 et des conditions initiales vérifiées par f_0 et f_1, montrer que $w_{00} = f_0(2\pi)$, $w_{01} = f_1(2\pi)$, $w_{10} = f_0'(2\pi)$ et $w_{11} = f_1'(2\pi)$.

II.3 Raisonner par double implication et utiliser la méthode et le résultat de la question précédente.

II.4 Se servir aussi du résultat de la question I.3.

II.5.1 Trouver des majorations indépendantes de $x \in \mathbb{R}$ des modules de

$$\mathrm{K}(x,t)f_0(t), \quad \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x}(x,t)f_0(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial x^2}(x,t)f_0(t)$$

par des fonctions intégrables en t sur $[\,-\pi\,;\pi\,]$.

II.5.2 Utiliser la périodicité à $x \in \mathbb{R}$ fixé des fonctions $\mathrm{K}(x,.)$ et f_0 lors des intégrations par parties successives.

II.5.3 S'appuyer sur la question précédente, la question I.3 et la parité de F.

Partie III

III.1 Penser à l'équation caractéristique de l'équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (E).

III.2 Calculer y' et y'' en fonction des dérivées de z, et injecter ces expressions dans l'équation (E).

III.3.1 Pour l'estimation du rayon de convergence, séparer les termes d'indices pairs de ceux d'indices impairs dans la série entière. Ensuite, on pourra distinguer plusieurs cas, en fonction de la nullité éventuelle de a_0 et a_1 ainsi que des valeurs de ω.

III.3.2 Utiliser le résultat de la question III.2 ainsi que celui de la question III.1.

III.3.3 Appliquer les résultats des questions précédentes avec des valeurs de ω bien choisies. Pour étendre les égalités à $\mathbb{R}$ tout entier, commencer par les étendre à $[\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$, remarquer que P_m est pair et Q_m impair, et pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque, se ramener à l'égalité déjà démontrée en utilisant ces remarques.

Partie I

I.1 Soit y une solution de (E) sur l'intervalle I. Montrons par récurrence sur k que la propriété

$$\mathscr{P}(k): y \text{ est de classe } \mathscr{C}^k \text{ sur I}$$

est vraie pour tout $k \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0;1\}$.

Pour initialiser la récurrence, on constate que puisque y est solution de l'équation différentielle du second ordre (E) sur I, elle est deux fois dérivable sur I et l'on a

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad y''(x) = -\varphi(x)y(x)$$

La fonction φ étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, elle est continue sur I. Par suite, y'' est continue sur I, comme produit de fonctions continues sur I, et donc y est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Ainsi, $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

Pour montrer l'hérédité de la propriété, supposons que la propriété $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour un certain k appartenant à $\mathbb{N} \smallsetminus \{0;1\}$ et montrons que cela implique que la propriété $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie. Soit donc $k \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0;1\}$ tel que la solution y de (E) sur I est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I. Montrons qu'elle est alors de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur I. Puisque y est solution de (E) sur I, on a

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad y''(x) = -\varphi(x)y(x)$$

La fonction φ étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, elle est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I. Par suite, y'' est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I. Ainsi, y est de classe $\mathscr{C}^{k+2}$ sur I. En particulier, y est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur I ; c'est-à-dire que la propriété $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie. Ceci assure que $\mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)$.

On en déduit que pour tout $k \geqslant 2$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Par conséquent, pour tout entier k, la fonction y est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I. Finalement,

$$\boxed{\text{Toute solution de (E) sur I est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur I.}}$$

Le résultat que nous venons de montrer pour les solutions de (E) sur I se généralise sans peine aux solutions d'équations différentielles linéaires d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients réguliers résolues en $y^{(n)}$ et éventuellement inhomogènes, c'est-à-dire de la forme

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

où $a_0, \ldots, a_{n-1}$ et f sont $n+1$ fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Avec de bonnes hypothèses, notre résultat se généralise aussi à certaines équations différentielles non linéaires d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ résolues en $y^{(n)}$. Le lecteur curieux pourra essayer de préciser ces hypothèses.

Le rapport du jury pour cette épreuve note dans ses considérations générales qu'« une dégradation dans l'utilisation de la langue française [...] accompagnée d'une imprécision générale du langage [conduit] par exemple [à] une grande difficulté pour démontrer une équivalence de propositions ou pour présenter un raisonnement par récurrence de façon cohérente. » On ne saurait trop recommander aux candidats de soigner la rédaction de leur copie de la première à la dernière question.

I.2 Soit y une solution de (E) sur I. Puisque I est symétrique par rapport à 0, la fonction

$$z\colon \begin{cases} \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto y(-x) \end{cases}$$

est bien définie sur I. En outre, d'après la question précédente, la fonction y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I. Il en découle que la fonction z est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, comme composée d'applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I. De plus,

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad z'(x) = -y'(-x) \qquad \text{et} \qquad z''(x) = y''(-x)$$

Par suite $\qquad \forall x \in \mathrm{I} \qquad z''(x) + \varphi(x)z(x) = y''(-x) + \varphi(x)y(-x)$

Enfin, la fonction φ est paire sur I et la fonction y est solution de (E) sur I, donc

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad z''(x) + \varphi(x)z(x) = y''(-x) + \varphi(-x)y(-x) = 0$$

puisque $-x \in \mathrm{I}$. En conséquence,

$$\boxed{\text{La fonction } x \longmapsto y(-x) \text{ est solution de (E) sur I.}}$$

I.3 D'après le résultat de I.1, f_0 et f_1 sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I. Le résultat démontré à la question précédente assure en outre que les fonctions

$$g_0\colon \begin{cases} \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f_0(-x) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g_1\colon \begin{cases} \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -f_1(-x) \end{cases}$$

sont solutions de (E) sur I. De plus, la fonction g_0 vérifie

$$g_0(0) = f_0(-0) = f_0(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad g_0'(0) = -f_0'(-0) = -f_0'(0) = 0$$

Puisque f_0 est l'*unique* solution de (E) sur I vérifiant ces conditions, il vient que les fonctions f_0 et g_0 sont égales. On en déduit

$$\boxed{\text{La fonction } f_0 \text{ est paire sur l'intervalle I.}}$$

De même, la fonction g_1 vérifie

$$g_1(0) = -f_1(-0) = -f_1(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad g_1'(0) = +f_1'(-0) = +f_1'(0) = -1$$

et puisque f_1 est l'*unique* solution de (E) sur I vérifiant ces conditions, on en déduit que $f_1 = g_1$. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction } f_1 \text{ est impaire sur l'intervalle I.}}$$

Puisque f_0 est paire sur I et f_1 est impaire sur I, et sachant que ces fonctions ne sont pas nulles, elles forment une famille libre de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I})$. Le cours assure que l'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle scalaire linéaire homogène d'ordre 2 résolue en y'' (E) est un espace vectoriel de dimension 2. On en déduit que (f_0, f_1) est une base de l'espace vectoriel des solutions de (E) sur I. Par conséquent,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La solution générale de (E) sur I est } af_0+bf_1 \\ \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux constantes réelles fixées.}\end{array}}$$