X Physique MP 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benoît Lobry (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Julien Dumont (Professeur en CPGE) et Jean-Julien Fleck (Professeur en CPGE).

Cette épreuve porte sur le confinement magnétique d'un plasma tel qu'il est mis en œuvre dans les réacteurs de fusion de type tokamak. Le problème forme un ensemble cohérent et logique où après la réaction de fusion elle-même, les trois aspects du critère de Lawson (densité, température, durée de confinement) sont analysés.

- Dans la première partie, on caractérise rapidement la réaction de fusion de l'hydrogène. C'est une partie assez simple si l'on pense à utiliser les relations de conservation.
- La deuxième partie étudie l'équilibre mécanique du plasma soumis aux forces magnétique et de pression. Ayant calculé la densité particulaire au cœur du réacteur, on peut en déduire la durée minimale de confinement.
- Une troisième partie s'intéresse au réchauffement du plasma par effet Landau. Il s'agit d'expliquer comment une onde électrostatique peut augmenter l'agitation thermique d'un plasma.
- La quatrième partie envisage enfin le confinement magnétique proprement dit. Pour cela, on analyse préalablement le mouvement cyclotronique d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme, puis l'on dégage le problème de la dérive lente dans un champ faiblement non uniforme.

Les concepts physiques mis en jeu dans ce problème sont relatifs à l'électrostatique, à la magnétostatique, à la mécanique du point, à quelques points de la thermodynamique et appartiennent presqu'exclusivement au programme de première année. Les calculs des quatre parties sont indépendants.

Il s'agit dans l'ensemble d'un problème long et difficile mais bien adapté au niveau du concours. Quelques questions sont proches du cours (calculs de champ magnétique, mouvements d'une particule chargée, portrait de phase) et se doivent d'être très soignées. D'autres, moins abordables et parfois sans calculs, permettent de faire la différence.

Indications

Première partie

I.1 Traduire conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement. Le noyau d'hélium ${}_2^4\mathrm{He}$ comporte 2 protons et 2 neutrons.

Deuxième partie

II.2.a L'expression volumique de la force de pression est $\overrightarrow{\mathrm{dF}}_{\mathrm{p}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{P}\,\mathrm{dV}$.

II.3.b Utiliser la question II.2.a en prenant en compte le champ total.

II.4.a Que dire des densités volumiques n_{D} et n_{e} ?

Troisième partie

III.1.a Noter qu'on a $\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi$.

III.1.b L'onde électrique se propage à la vitesse $c_\Phi\,\overrightarrow{e_x}$ dans $\mathcal{R}$ avec $c_\Phi = \omega_1/k$.

III.1.c Tracer E en fonction de x', identifier les positions d'équilibres stables et le maximum d'énergie potentielle. Distinguer la nature de la trajectoire en fonction de la position de E par rapport à ce maximum.

III.1.d Justifier que l'énergie cinétique initiale d'une particule piégée dans $\mathcal{R}'$ est au plus $2q\Phi_0$. Écrire $v_x = c_\Phi + v'_x$ et

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{t}\int_0^t v_x(u)\,\mathrm{d}u$$

III.2.b Distinguer les particules des intervalles $]c_\Phi - \delta, c_\Phi[$ et $]c_\Phi, c_\Phi + \delta[$. Ces particules sont-elles accélérées ou ralenties lors du piégeage ?

III.2.c Quelles particules participent le plus à la définition statistique de T ?

Quatrième partie

IV.1.b Projeter le principe fondamental de la dynamique dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ et découpler les équations selon x et y.

IV.1.c La masse des ions est de l'ordre de m_{n}.

IV.1.d Considérer que l'intensité du courant est $i = q/\mathrm{T}$ où T est la période du mouvement de giration.

IV.2.b Écrire le principe fondamental de la dynamique avec la vitesse $\overrightarrow{u}_\perp + \overrightarrow{\mathrm{U}}$ et simplifier en considérant, notamment, que $\overrightarrow{u}_\perp$ vérifie la même équation du mouvement qu'à la question IV.1.d.

IV.2.f Utiliser le formulaire avec $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \mathrm{U}_{||}$ pour montrer

$$\overrightarrow{b} \wedge \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{U}}}{\mathrm{d}t} \simeq \frac{\mathrm{U}_{||}^{\,2}}{\mathrm{R}}\,\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{n}$$

IV.3.b Que valent R et $\overrightarrow{n}$ ici ? Remplacer Ω, μ et B par leurs expressions.

IV.3.d Montrer qu'il s'agit de la composante selon $\overrightarrow{e_z}$ du moment cinétique $\overrightarrow{\mathrm{L}}_{\mathrm{O}}$.

IV.3.e Montrer qu'il s'agit de la composante selon $\overrightarrow{e_z}$ de $m\overrightarrow{u} + q\overrightarrow{\mathrm{A}}$ où $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ est le potentiel magnétique.

IV.3.f Utiliser l'équation selon $\overrightarrow{e_r}$.

IV.4.b Le mouvement des particules le long des lignes de champ se fait alternativement au-dessus et au-dessous de la génératrice du solénoïde torique.

Quelques aspects de la fusion contrôlée par confinement magnétique

I. Cinématique de la réaction

I.1 Les énergies cinétiques $\mathrm{K_n}$ du neutron et K_α de la particule alpha proviennent de l'énergie $\mathrm{E_f}$ libérée lors de la fusion. Par conséquent

$$\mathrm{E_f} = \mathrm{K_n} + \mathrm{K}_\alpha \qquad (\star)$$

Comme on a négligé leurs énergies cinétiques, les particules incidentes sont supposées quasi immobiles et la conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\overrightarrow{0} = m_\mathrm{n}\overrightarrow{v_\mathrm{n}} + m_\alpha \overrightarrow{v_\alpha}$$

Les vitesses des particules créées sont opposées et leurs normes vérifient

$$m_\mathrm{n} v_\mathrm{n} = m_\alpha v_\alpha$$

En termes d'énergie cinétique $\mathrm{K} = \dfrac{1}{2}\,mv^2$, cela conduit à

$$m_\mathrm{n}\mathrm{K_n} = m_\alpha \mathrm{K}_\alpha \qquad (\star\star)$$

On obtient alors facilement, à partir des relations de conservation $(\star)$ et $(\star\star)$

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} \mathrm{K_n} &= \frac{m_\alpha}{m_\mathrm{n}+m_\alpha}\,\mathrm{E_f} = 14{,}1\ \mathrm{MeV} \\ \mathrm{K}_\alpha &= \frac{m_\mathrm{n}}{m_\mathrm{n}+m_\alpha}\,\mathrm{E_f} = 3{,}52\ \mathrm{MeV} \end{aligned}\right.}$$

avec $m_\alpha = 2m_\mathrm{p} + 2m_\mathrm{n} \simeq 4m_\mathrm{n}$ pour la particule α, noyau d'hélium ${}^4_2\mathrm{He}$, qui comporte deux protons et deux neutrons.

I.2 Avec $1\ \mathrm{eV} = 1{,}60.10^{-19}$ J, on déduit des valeurs numériques précédentes

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} v_\mathrm{n} &= \sqrt{\frac{2\mathrm{K_n}}{m_\mathrm{n}}} = 5{,}19.10^7\ \mathrm{m.s^{-1}} \\ v_\alpha &= \sqrt{\frac{2\mathrm{K}_\alpha}{m_\alpha}} = 1{,}30.10^7\ \mathrm{m.s^{-1}} \end{aligned}\right.}$$

> La particule la plus lègère est bien la plus rapide. Les vitesses évaluées sont cependant proches de la célérité c de la lumière. Pour une étude plus fine dans le formalisme de la relativité restreinte, il conviendrait d'écrire la quantité de mouvement et l'énergie cinétique sous la forme
>
> $$\left\{\begin{aligned} \overrightarrow{p} &= \gamma\, m\, \overrightarrow{v} \\ \mathrm{K} &= (\gamma - 1) mc^2 \end{aligned}\right. \qquad \text{où} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
>
> Avec $v^2 \ll c^2$, des développements limités aux ordres les plus bas non nuls conduisent aux expressions utilisées en mécanique newtonienne
>
> $$\overrightarrow{p} = m\,\overrightarrow{v} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{K} = \frac{1}{2}\,mv^2$$
>
> Par ailleurs, l'énergie libérée $\mathrm{E_f}$ provient d'une variation de la masse, donc de l'énergie de masse mc^2, des particules réactives. En suivant le bilan réactionnel de fusion, on obtient
>
> $$\mathrm{E_f} = (m_\mathrm{n} + m_\alpha - m_\mathrm{D} - m_\mathrm{T})\, c^2$$
>
> et la relation $(\star)$ traduit la conservation de l'énergie totale $\mathrm{E} = mc^2 + \mathrm{K}$.

II. Pression et densité de plasma

II.1 Le vecteur densité de courant électrique s'écrit $\overrightarrow{\jmath} = \sum\limits_i n_i\, q_i\, \overrightarrow{v_i}$. Cela donne

$$\boxed{\overrightarrow{\jmath} = e\big(n_{\mathrm{D}}\, \overrightarrow{v_{\mathrm{D}}} - n_{\mathrm{e}}\, \overrightarrow{v_{\mathrm{e}}}\big)}$$

où la charge de l'ion deutérium est nécessairement $+e$ puisque l'atome de deutérium ${}^2_1\mathrm{D}$ est un isotope de l'hydrogène et ne possède qu'un électron.

II.2.a Comme le plasma est localement neutre, la force électrique n'intervient pas. Les actions mises en jeu sont la force magnétique, dite de Laplace, et la force de pression. Pour un élément de volume dV, elles s'écrivent

$$\overrightarrow{\mathrm{dF}}_{\mathrm{m}} = \overrightarrow{\jmath}\, \mathrm{dV} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{dF}}_{\mathrm{p}} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathrm{P}\, \mathrm{dV}$$

L'équilibre des forces en régime permanent donne

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathrm{P} = \overrightarrow{\jmath} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}}$$

> L'expression volumique générale de la force de pression peut se déduire de sa restriction unidimensionnelle vue en première année sur un élément de volume $\mathrm{dV} = \mathrm{S}\, \mathrm{d}z$ d'atmosphère
>
> $$\overrightarrow{\mathrm{dF}}_{\mathrm{p}} = -\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z}\, \mathrm{S}\, \mathrm{d}z\, \overrightarrow{e_z} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathrm{P}\, \mathrm{dV}$$
>
> ou bien de la formule du gradient pour un volume $\mathcal{V}$ quelconque
>
> $$\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{p}} = -\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{P}\, \overrightarrow{\mathrm{dS}}_{\,\mathrm{sortant}} = -\iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathrm{P}\, \mathrm{dV}$$

II.2.b Une ligne de courant et une ligne de champ magnétique sont respectivement tangentes en tout point aux vecteurs $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}}$. On les caractérise par

$$\overrightarrow{\jmath} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \overrightarrow{0} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{B}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \overrightarrow{0}$$

Le résultat de la question précédente et les propriétés du produit mixte permettent par ailleurs d'écrire

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathrm{P} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -\big(\overrightarrow{\jmath} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}\big) \cdot \overrightarrow{\mathrm{B}} = \big(\overrightarrow{\mathrm{B}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}\big) \cdot \overrightarrow{\jmath}$$

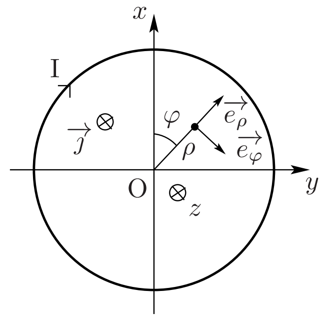
Dans les deux cas, on aboutit à

$$\mathrm{dP} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathrm{P} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0$$

qui caractérise le fait que

$$\boxed{\text{Les lignes de courant et les lignes de champ magnétique sont des isobares.}}$$

II.3.a Le plan $(\mathrm{M}, \overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_z})$ est un plan de symétrie vis-à-vis de la densité de courant $\overrightarrow{\jmath} = j_z\, \overrightarrow{e_z}$, par conséquent le champ additionnel (le champ magnétique est un vecteur axial) lui est perpendiculaire. La densité de courant $\overrightarrow{\jmath}$ est invariante par rotation d'angle φ et par translation selon z donc le champ additionnel ne dépend que de ρ. Au total, le champ magnétique additionnel s'écrit nécessairement



$$\overrightarrow{\mathrm{B}_{\mathrm{a}}} = \mathrm{B}_{\mathrm{a}}(\rho)\, \overrightarrow{e_\varphi}$$