Mines Maths 2 MP 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benoît Chevalier (ENS Ulm) ; il a été relu par Sophie Rainero (Professeur en CPGE) et Gilbert Monna (Professeur en CPGE).

Ce sujet introduit la notion d'algèbre de Lie. Une algèbre de Lie est un sous-espace vectoriel A de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ stable par le crochet de Lie :

$$\forall (\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathrm{A}^2, \quad [\mathrm{M}, \mathrm{N}] = \mathrm{MN} - \mathrm{NM} \in \mathrm{A}$$

- La première partie consiste à établir un premier théorème qui permet, sous certaines conditions, de trouver des vecteurs propres communs à un ensemble de matrices.
- La deuxième partie est consacrée à la démonstration du théorème sur les algèbres de Lie résolubles : cette propriété est équivalente à celle d'avoir tous ses éléments trigonalisables dans une base commune.

Comme les questions réutilisent sans cesse les mêmes raisonnements, il est préférable d'éviter d'en sauter, sous peine d'être bloqué à nouveau très rapidement.

Comme il arrive dans les épreuves de concours, le problème correspond à un enseignement de niveau licence ou maîtrise. Pour autant, ce type de sujet n'avantage pas particulièrement les élèves qui ont fait beaucoup de « hors programme » pendant l'année : les méthodes utilisées, très classiques, ne demandent le plus souvent que de maîtriser le raisonnement par récurrence.

Ce problème n'est ni particulièrement difficile ni spécialement long. Aussi, sur ce type d'énoncé, les correcteurs sont-ils plus enclins à se laisser convaincre par les copies qui apportent une attention particulière à une rédaction claire et rigoureuse.

Indications

I. Algèbres de Lie

3 Remarquer que la formule (**2**) au rang k implique la formule (**1**) au rang $k+1$, tandis que cette dernière entraîne la formule (**2**) au rang $k+1$. Utiliser pour la première partie la relation de Pascal : $\mathrm{C}_k^j + \mathrm{C}_k^{j-1} = \mathrm{C}_{k+1}^j$.

5 Pour montrer que $\overline{\mathrm{A}}_\mathrm{G}$ stabilise G, vérifier que X_{q+1} est une combinaison linéaire des $(\mathrm{X}_i)_{0\leqslant i\leqslant q}$.

II. Algèbres de Lie résolubles

11 Vérifier que la suite $\{0\} = \mathcal{N}_n \subset \mathcal{N}_{n-1} \subset \ldots \subset \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0 = \mathcal{T}_\mathrm{P}$ constitue une résolution de l'algèbre de Lie $\mathcal{T}_\mathrm{P}$.

13 On peut démontrer par récurrence que, pour toute famille commutative finie $(f_1,\ldots,f_p)$ d'endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, il existe un vecteur x de E qui est vecteur propre de f_i pour tout i compris entre 1 et p. Utiliser le fait que si deux endomorphismes commutent, chacun stabilise les sous-espaces propres de l'autre.

17 Dans cette question – la plus longue du problème – commencer par démontrer, en utilisant les résultats établis à la question 11, que s'il existe une base de trigonalisation commune à tous les éléments de $\mathcal{U}$, alors $\mathcal{U}$ est résoluble. Réciproquement, si $\mathcal{U}$ est résoluble de longueur 1 sur un espace de dimension $n+1$, la base de trigonalisation commune recherchée peut être construite en réunissant un vecteur propre commun X (comme à la question 14) avec une base d'un supplémentaire H de Vect (X). Se servir de l'hypothèse de récurrence sur H – de dimension n – en exploitant les résultats démontrés à la question 16.

19 Utiliser le théorème 1.

I. Algèbres de Lie

1 Dans cette question, X est une matrice colonne propre – donc non nulle – pour tout élément M de $\mathcal{V}$, mais peut éventuellement être associée (l'énoncé ne dit rien à ce sujet) à des valeurs propres qui varient en fonction de M. Cela signifie que $\mathrm{MX} = \lambda(\mathrm{M})\mathrm{X}$. λ est une application de $\mathcal{V}$ dans $\mathbb{C}$ et il suffit de vérifier que cette application est linéaire pour répondre à la question.

Soient a et b des complexes, et M et N des éléments de $\mathcal{V}$. Comme celui-ci est un espace vectoriel, $a\mathrm{M} + b\mathrm{N}$ appartient à $\mathcal{V}$.

$$(a\mathrm{M} + b\mathrm{N})\mathrm{X} = a\mathrm{MX} + b\mathrm{NX} = a\lambda(\mathrm{M})\mathrm{X} + b\lambda(\mathrm{N})\mathrm{X} = (a\lambda(\mathrm{M}) + b\lambda(\mathrm{N}))\mathrm{X}$$

Comme, par définition, $(a\mathrm{M} + b\mathrm{N})\mathrm{X} = \lambda(a\mathrm{M} + b\mathrm{N})\mathrm{X}$, il s'ensuit que

$$(\lambda(a\mathrm{M} + b\mathrm{N}) - a\lambda(\mathrm{M}) - b\lambda(\mathrm{N}))\,\mathrm{X} = 0$$

et X étant différent du vecteur nul, $\lambda(a\mathrm{M} + b\mathrm{N}) = a\lambda(\mathrm{M}) + b\lambda(\mathrm{N})$

$$\boxed{\lambda \text{ est une forme linéaire.}}$$

2 L'énoncé a posé l'inclusion $[\mathcal{U}] \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.

Si M est un élément de $\mathcal{V}$, il est aussi a fortiori dans $\mathcal{U}$, et comme on suppose que A est également dans $\mathcal{U}$, alors le crochet de Lie $[\mathrm{M}, \mathrm{A}]$ est par définition dans $[\mathcal{U}]$.

Comme ce dernier est inclus dans $\mathcal{V}$, on obtient

$$\boxed{[\mathrm{M}, \mathrm{A}] \in \mathcal{V}}$$

3 Si l'égalité (**1**) est vérifiée pour toute matrice, elle est en particulier vraie pour la matrice $[\mathrm{M}, \mathrm{A}]$, ce qui s'écrit

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad [\mathrm{M}, \mathrm{A}]\mathrm{X}_i = \sum_{j=0}^{i} \mathrm{C}_i^j \lambda_{i-j}([\mathrm{M}, \mathrm{A}])\mathrm{X}_j$$

Par définition, $\lambda_{i-j}([\mathrm{M}, \mathrm{A}]) = \lambda_{i-j+1}(\mathrm{M})$. On obtient exactement la formule (**2**). Aussi, on se limite, dans la suite de la question, à la démonstration de (**1**).

> La notation C_i^j désigne dans l'énoncé le coefficient $\dbinom{i}{j} = \dfrac{i!}{j! \times (i-j)!}$.
> On peut utiliser la relation de Pascal
> $$\mathrm{C}_i^{j-1} + \mathrm{C}_i^j = \mathrm{C}_{i+1}^j \qquad (\text{avec } 0 < j \leqslant i)$$
> Ce résultat, très connu, ne nécessite pas d'être redémontré dans la copie.

Soit $\mathscr{P}(i)$ la propriété :

« La formule (**1**) est vraie au rang i pour tout M dans $\mathcal{V}$. »

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie puisque, pour $i = 0$, la formule (**1**) devient $\mathrm{MX}_0 = \mathrm{C}_0^0\lambda_0(\mathrm{M})\mathrm{X}_0$, c'est-à-dire $\mathrm{MX} = \lambda(\mathrm{M})\mathrm{X}$, soit la définition de $\lambda(\mathrm{M})$.
- $\underline{\mathscr{P}(i) \Longrightarrow \mathscr{P}(i+1)}$: on suppose ici la formule (**1**) vraie jusqu'au rang i. Il faut en déduire qu'elle est dans ce cas encore vraie au rang $i + 1$.

$$\mathrm{MX}_{i+1} = \mathrm{MAX}_i = (\mathrm{MA} - \mathrm{AM} + \mathrm{AM})\mathrm{X}_i = [\mathrm{M}, \mathrm{A}]\mathrm{X}_i + \mathrm{AMX}_i$$

Chacun des deux termes du membre de droite peut être développé suivant la formule (**1**) de l'hypothèse de récurrence. Il s'ensuit

$$\mathrm{MX}_{i+1} = \sum_{j=0}^{i} \mathrm{C}_i^j \lambda_{i-j+1}(\mathrm{M})\mathrm{X}_j + \mathrm{A}\sum_{j=0}^{i} \mathrm{C}_i^j \lambda_{i-j}(\mathrm{M})\mathrm{X}_j$$

Il faut, maintenant, rentrer A à l'intérieur de la seconde somme, et utiliser le fait que par définition $\mathrm{AX}_j = \mathrm{X}_{j+1}$.

$$\mathrm{MX}_{i+1} = \sum_{j=0}^{i} \mathrm{C}_i^j \lambda_{i-j+1}(\mathrm{M})\mathrm{X}_j + \sum_{j=0}^{i} \mathrm{C}_i^j \lambda_{i-j}(\mathrm{M})\mathrm{X}_{j+1}$$

On procède à présent à un décalage d'indice de sommation dans la somme de droite et on réunit les termes de même indice, en mettant à part le cas où $j = 0$ dans la première somme, et le cas où $j = i + 1$ dans la seconde, qui n'apparaissent qu'une seule fois.

$$\begin{aligned}\mathrm{MX}_{i+1} &= \sum_{j=0}^{i} \mathrm{C}_i^j \lambda_{i-j+1}(\mathrm{M})\mathrm{X}_j + \sum_{j=1}^{i+1} \mathrm{C}_i^{j-1} \lambda_{i-j+1}(\mathrm{M})\mathrm{X}_j \\ &= \mathrm{C}_i^0 \lambda_{i+1}(\mathrm{M})\mathrm{X}_0 + \sum_{j=1}^{i} (\mathrm{C}_i^j + \mathrm{C}_i^{j-1})\lambda_{i-j+1}(\mathrm{M})\mathrm{X}_j + \mathrm{C}_i^i \lambda_0(\mathrm{M})\mathrm{X}_{i+1}\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à identifier $\mathrm{C}_i^i = 1 = \mathrm{C}_{i+1}^{i+1}$ et $\mathrm{C}_i^{j-1} + \mathrm{C}_i^j = \mathrm{C}_{i+1}^j$:

$$\mathrm{MX}_{i+1} = \sum_{j=0}^{i+1} \mathrm{C}_{i+1}^j \lambda_{i+1-j}(\mathrm{M})\mathrm{X}_j$$

Ainsi s'achève la démonstration de la formule (**1**) au rang $i+1$. La formule (**2**) s'en déduit comme indiqué au début de la question.

- Conclusion : $\mathscr{P}(i)$ est vérifiée pour tout entier i.

En conséquence, $\boxed{\text{Les formules } (\mathbf{1}) \text{ et } (\mathbf{2}) \text{ sont vraies pour tout } i.}$

$\boxed{4}$ D'une part, $\mathrm{X}_0 = \mathrm{X}$ étant un vecteur non nul (car défini comme un vecteur propre), $\{\mathrm{X}_0\}$ constitue une famille libre à un élément. D'autre part, dans $\mathbb{C}^n$, espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$, une famille libre a, au plus, n vecteurs.

Considérons l'ensemble $\mathrm{R} = \{r \in \mathbb{N} \mid \{\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_r\} \text{ est libre}\}$. Ensemble d'entiers, R n'est pas vide puisqu'il contient 0, et comme il est borné par $n - 1$, il admet un élément maximal que l'on peut noter q.

$\boxed{5}$ $\overline{\mathrm{M}}_\mathrm{G}$, $\overline{[\mathrm{M}, \mathrm{A}]}_\mathrm{G}$ et $\overline{\mathrm{A}}_\mathrm{G}$ sont des applications linéaires sur G puisqu'elles sont les restrictions d'applications linéaires sur $\mathbb{C}^n$, qui contient G. Pour démontrer qu'il s'agit d'endomorphismes de G, il faut vérifier qu'elles sont bien à valeurs dans G, c'est-à-dire qu'elles transforment toute combinaison linéaire des X_i, pour i allant de 0 à q, en une combinaison linéaire des X_i.

Par linéarité, il suffit de montrer que chacun des $q + 1$ vecteurs X_0, …, X_q a pour image par chacune des trois applications une combinaison linéaire des vecteurs X_0, …, X_q.

Pour l'application $\overline{\mathrm{M}}_\mathrm{G}$, cette propriété résulte de la formule (**1**) démontrée à la question 3, qui donne les coefficients de chaque combinaison linéaire.