E3A Maths B MP 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Chloé Mullaert (ENS Cachan) ; il a été relu par Sophie Rainero (Professeur en CPGE) et Walter Appel (Professeur en CPGE).

Le sujet comporte trois exercices indépendants.

- Le premier exercice porte sur la résolution d'équations différentielles. On étudie un cas classique
$$x\,y'(x) + \alpha\,y(x) = \mathrm{F}(x)$$
où l'on doit se placer sur un intervalle ne contenant pas zéro pour espérer être dans les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz. Lorsque le second membre est développable en série entière, on s'intéresse en particulier aux solutions de même type et à leurs propriétés (rayon de convergence, limite en zéro). Les raisonnements de cet exercice sont classiques et il offre donc un bon moyen de se les approprier.
- Le deuxième exercice traite de la recherche d'extrema locaux d'une fonction régulière. Seules les conditions d'ordre 1 sont étudiées ; l'exercice n'aborde pas les questions de conditions suffisantes et nécessaires d'ordre 2 pour être un extremum local. Il exige peu de connaissances, mais il nécessite d'avoir assimilé les arguments classiques et de maîtriser le calcul de dérivées partielles.
- Le dernier exercice est plus difficile. Après avoir étudié la matrice
$$\mathrm{J}_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n} & \cdots & \dfrac{1}{n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{n} & \cdots & \dfrac{1}{n} \end{pmatrix}$$
on étudie les solutions d'une équation par deux méthodes. Dans la première, une étude de cas soigneuse permet de conclure ; dans la seconde, un calcul astucieux de déterminant conduit aux mêmes résultats.

Indications

Exercice 1

1 La dérivée de $t \mapsto |t|^\alpha$ est $t \mapsto t\,|t|^{\alpha-2}$.

2.a La fonction y est solution de l'équation homogène sur I si et seulement si ses restrictions à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont solutions de l'équation homogène respectivement sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

3 Sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, x ne s'annule pas donc on divise par x pour se ramener dans les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz.

4 Montrer que si deux solutions conviennent alors elles sont égales.

5.a Comparer les coefficients a_i aux coefficients β_i.

6.b La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{d}t$ est une primitive de $t \mapsto t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{\,t}$.

6.c Faire une intégration par parties et utiliser le fait que la fonction $t \mapsto t^\alpha \mathrm{e}^{\,t}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

6.d Utiliser les conclusions des questions 4 et 5.

Exercice 2

2.a Utiliser la compacité de D.

2.c Faire une étude de fonction.

Exercice 3

2 Utiliser le théorème du rang.

5.a Utiliser le fait que $\det(x\mathrm{J}_n) = x^n \det(\mathrm{J}_n) = 0$ et la question 2.

5.b Se ramener au spectre de J_n.

5.c.ii Distinguer deux cas suivant que σ est nul ou non.

5.d.i Montrer que zéro appartient à $\mathcal{S}_\mathcal{E}$.

5.d.iii Séparer les cas suivant qu'il existe ou pas un réel b tel que $\mathrm{M} + b\mathrm{J}_n$ soit inversible et utiliser les conclusions de la question 5.c.ii.

6.a Introduire $\mathrm{C} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i$ où $(\mathrm{E}_1,\ldots,\mathrm{E}_n)$ est la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sorte que toutes les colonnes de J_n soient égales à C puis utiliser la multilinéarité et l'antisymétrie du déterminant. Enfin, vérifier que si on note les colonnes de M par $(\mathrm{M}_1,\ldots,\mathrm{M}_n)$, alors

$$\det(\mathrm{M}_1,\ldots,\mathrm{M}_{i-1},\mathrm{E}_k,\mathrm{M}_{i+1},\ldots,\mathrm{M}_n) = (\mathrm{Com}\ \mathrm{M})_{i,k}$$

Exercice 1

1 Si on suit l'indication en définissant z par $z\,(x) = |x|^\alpha\, y\,(x)$ pour tout $x \in \mathrm{J}$, ce qui possible car α est strictement positif, alors z est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si y l'est et, dans ce cas, pour tout réel x

$$z'\,(x) = \alpha x\,|x|^{\alpha-2}\,y\,(x) + |x|^\alpha\,y'\,(x) = x\,|x|^{\alpha-2}\,\big(\alpha y\,(x) + xy'\,(x)\,\big)$$

D'après le rapport du jury, la dérivation de la valeur absolue a posé problème à de nombreux candidats. Rappelons que la dérivée de $t \mapsto |t|^\alpha$, sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas zéro, est

$$t \mapsto \alpha\, t\,|t|^{\alpha-2}.$$

En effet, sur $\mathbb{R}_-^*$, $|t|^\alpha = (-1)^\alpha\, t^\alpha$ donc la dérivée de $t \mapsto |t|^\alpha$ sur $\mathbb{R}_-^*$ vaut $t \mapsto (-1)^\alpha\,\alpha\,t^{\alpha-1}$. Sur $\mathbb{R}_+^*$, $|t|^\alpha = t^\alpha$ donc la dérivée de $t \mapsto |t|^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vaut $t \mapsto \alpha\,t^{\alpha-1}$. Ainsi, la dérivée de $t \mapsto |t|^\alpha$ est égale à

$$t \mapsto \begin{cases} \alpha\,t^{\alpha-1} & \text{si } t > 0 \\ (-1)^\alpha\,\alpha\,t^{\alpha-1} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire à
$$t \mapsto \left(\frac{|t|}{t}\right)^\alpha \alpha\,t^{\alpha-1}$$

on retrouve le résultat en utilisant l'égalité $t^2 = |t|^2$ qui implique, pour tout t non nul, $t^{-1} = t\,|t|^{-2}$.

Ainsi, pour tout $x \neq 0$, on a l'équivalence

$$\alpha\,y\,(x) + x\,y'\,(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z'\,(x) = 0$$

Par conséquent, y est solution de l'équation homogène sur J si et seulement si $z' = 0$ sur J c'est-à-dire si et seulement si z est constante sur J (car J est un intervalle). Finalement, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$\boxed{x \mapsto \mathrm{C}\,|x|^{-\alpha} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{C} \in \mathbb{R}}$$

D'après le rapport du jury, « certains candidats semblent avoir été déroutés par l'indication ». Il précise que cette indication n'est en rien obligatoire, on peut arriver au résultat sans celle-ci. Comme $0 \notin \mathrm{J}$, on a l'équivalence

$$\alpha\,y\,(x) + x\,y'\,(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y'\,(x) = -\frac{\alpha}{x}y\,(x)$$

La fonction $x \mapsto \alpha/x$ est continue sur J et admet pour primitive sur cet intervalle la fonction $\mathrm{A}: x \mapsto \alpha\ln(|x|)$. D'après le cours, les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $x \mapsto \mathrm{C}\,\exp\big(-\mathrm{A}(x)\big)$ avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$. Par conséquent, on retrouve le résultat sans passer par l'intermédiaire de z.

2.a Par définition, y est solution de l'équation homogène sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}^*$ si et seulement si ses restrictions à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont solutions de l'équation homogène. Ainsi, y est solution sur I si et seulement s'il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$\boxed{y\,(x) = \begin{cases} \mathrm{C}_1\,|x|^{-\alpha} & \text{si } x > 0 \\ \mathrm{C}_2\,|x|^{-\alpha} & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

2.b Comme $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} |x|^{-\alpha} = +\infty$. Par conséquent, la fonction $x \mapsto \mathrm{C}\,|x|^{-\alpha}$ admet une limite finie en zéro si et seulement si $\mathrm{C} = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\text{La seule solution qui admette une limite finie en zéro est la solution nulle.}}$$

3 Posons $\mathrm{J} = \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathrm{J}$, on a l'équivalence

$$\alpha\, y\,(x) + x\, y'\,(x) = \mathrm{F}\,(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \frac{y\,(x)}{x} + y'\,(x) = \frac{\mathrm{F}\,(x)}{x}$$

La fonction $(x, y) \mapsto \mathrm{F}\,(x)\,/x - \alpha\, y/x$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{J} \times \mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. En particulier, il existe une unique solution f^+ sur $\mathrm{J} = \mathbb{R}_+^*$ telle que $f\,(1) = a$. Par un raisonnement analogue, il existe une unique solution f^- sur $\mathrm{J} = \mathbb{R}_-^*$ telle que $f\,(-1) = b$. Ainsi, f est une solution de $\mathcal{E}$ sur I telle que $f\,(1) = a$ et $f\,(-1) = b$ si et seulement si sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est f^+ et sa restriction à $\mathbb{R}_-^*$ est f^-. En particulier,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'équation différentielle } \mathcal{E} \text{ admet une unique solution } f \\ \text{définie sur I telle que } f\,(1) = a \text{ et } f\,(-1) = b.\end{array}}$$

Elle est donnée par
$$f\,(x) = \begin{cases} f^+\,(x) & \text{si } x > 0 \\ f^-\,(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4 Soient f_1 et f_2 deux solutions de $\mathcal{E}$ sur I admettant des limites finies en zéro, alors leur différence $f_1 - f_2$ est solution de l'équation homogène sur I et admet une limite finie en zéro. D'après 2.b, $f_1 - f_2$ est identiquement nulle donc $f_1 = f_2$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Il existe au plus une solution de } \mathcal{E} \text{ sur I qui admette une limite finie en zéro.}}$$

5.a Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i$ une fonction développable en série entière de rayon de convergence R. D'après le cours, on peut dériver terme à terme sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$:

$$\forall x \in\,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[\qquad f'\,(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i\, a_i\, x^{i-1}$$

donc
$$\forall x \in\,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[\qquad x\, f'\,(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i\, a_i\, x^i$$

d'où
$$\forall x \in\,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[\qquad x\, f'\,(x) + \alpha\, f\,(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (i + \alpha)\; a_i\, x^i$$

Dès lors, si f est solution de $\mathcal{E}$, alors par unicité du développement en série entière,

$$\forall i \in \mathbb{N} \qquad (i + \alpha)\, a_i = \beta_i$$

Or, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $i + \alpha \geqslant \alpha > 0$, donc $i + \alpha$ est non nul. Ainsi,

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N} \qquad a_i = \frac{\beta_i}{i + \alpha}}$$

> Dans le rapport du jury, il est conseillé aux candidats de « s'interroger lorsque l'on divise par un paramètre » afin de ne pas diviser par zéro. On ne saurait trop insister sur ce point !

En particulier,
$$\forall i \in \mathbb{N} \qquad |a_i| = \left|\frac{\beta_i}{i + \alpha}\right| \leqslant \frac{|\beta_i|}{\alpha}$$

ainsi le rayon de convergence de f est au moins aussi grand que celui de F c'est-à-dire

$$\boxed{\mathrm{R} = \infty}$$