CCP Maths 2 MP 2007 – Corrigé

Ce corrigé est proposé par Paul Pichaureau (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Nicolas Weiss (Doctorant en mathématiques) et Tristan Poullaouec (Professeur agrégé).

Ce problème aborde l'ensemble des isométries pour différentes normes de l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$. On cherche à y démontrer en particulier que les isométries pour les normes p définies par

$$\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right]^{1/p}$$

sont en nombre fini si $p \neq 2$ et en nombre infini si $p = 2$.

- Dans la partie I, on démontre quelques propriétés caractéristiques des normes euclidiennes. Au passage, on prouve que les normes p ne sont pas euclidiennes.
- La partie II est consacrée à l'étude de quelques exemples.
- La partie III établit une bijection entre l'ensemble des isométries pour une norme euclidienne et l'ensemble des isométries du produit scalaire canonique. On démontre ainsi que les isométries pour une norme euclidienne sont en nombre infini. Cette partie utilise comme outil de base la notion de racine carrée d'une matrice symétrique définie positive.
- Dans la partie IV, on étudie des isométries pour les normes p. À l'aide de l'inégalité de Hölder, on prouve que leurs matrices dans la base canonique sont d'une forme assez simple et enfin qu'elles sont en nombre fini.

Dans son rapport, le jury juge ce sujet « proche du cours, de difficulté raisonnable ». Effectivement, les parties I à II nécessitent surtout une bonne assimilation du cours et doivent être résolues rapidement et proprement. La partie III contient des questions classiques, mais présentées dans un contexte original. La question 12 exige rigueur et soin pour être traitée correctement. Le début de la partie IV ne devrait pas poser trop de difficultés. En revanche, les questions 16 et 18 demandent de l'intuition et une solide connaissance du cours.

Indications

Partie I

1.a Pour affirmer que $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas euclidienne, montrer à l'aide d'un contre-exemple que l'identité du parallélogramme n'est pas vérifiée.

1.b Utiliser l'indication précédente.

Partie II

4 Ne pas oublier de démontrer que $\mathrm{Isom(N)} \subset \mathrm{GL(E)}$.

6 Identifier géométriquement $\Sigma(\|\cdot\|_1)$ et s'appuyer sur le résultat de la question précédente.

7.c Se servir de la question 2. En particulier, démontrer que $\mathrm{S} \in \mathrm{S}^{++}(\mathbb{R})$.

7.d Se placer dans une base orthonormée de vecteurs propres de S.

Partie III

8.a Utiliser l'identité de la polarisation.

10.a Le polynôme L est l'antécédent de $(y_0, y_1, \ldots, y_r)$ par u.

11.b À l'aide de la question 10.b, démontrer qu'il existe un polynôme L tel que $\mathrm{A} = \mathrm{L(S)}$. Dans ce cas $\mathrm{A} = \mathrm{L(B^2)}$.

12.a Exploiter le résultat de la question 8.b.

12.b Exhiber la réciproque de ψ, en justifiant grâce à la question 8.b qu'elle est bien définie.

Partie IV

14.a Utiliser la concavité du logarithme népérien.

15 La j-ième colonne de A représente le vecteur $u(e_j)$. Calculer sa norme p.

16.a Introduire la fonction $f\colon \begin{cases} \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \langle x, y\rangle \end{cases}$. Démontrer qu'elle est continue grâce à l'inégalité de Hölder.

16.b Utiliser l'inégalité de Hölder. Justifier que $\|y\|_q = 1$.

17 Appliquer le résultat de la question 16 en intervertissant p et q.

18.a Il faut montrer que α_k ne peut valoir que 0 ou 1. Supposer que $p < q$. Dans ce cas $\alpha_k^p - \alpha_k^q > 0$ si $\alpha_k \in \,]\,0\,;1\,[$.

18.b Établir que $|a_{ij}| \in [\,0\,;1\,]$, et se servir de la question précédente.

19 Démontrer que, si A est la matrice d'une p-isométrie, chaque colonne de A ne contient qu'un seul 1 ou -1 et qu'il en va de même des lignes de A.

I. Description des normes euclidiennes

1.a Si N est une norme euclidienne, alors il existe un produit scalaire φ sur E tel que pour tout vecteur x de E, on a $\mathrm{N}(x)^2 = \varphi(x,x)$. Démontrons l'égalité du parallélogramme à l'aide de ce produit scalaire

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2 \qquad \big(\mathrm{N}(x+y)\big)^2+\big(\mathrm{N}(x-y)\big)^2 &= \varphi(x+y,x+y)+\varphi(x-y,x-y)\\ &= \big(\varphi(x,x)+2\varphi(x,y)+\varphi(y,y)\big)\\ &\qquad +\big(\varphi(x,x)-2\varphi(x,y)+\varphi(y,y)\big)\\ &= 2\varphi(x,x)+2\varphi(y,y)\\ &= 2\mathrm{N}(x)^2+2\mathrm{N}(y)^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2 \qquad \big(\mathrm{N}(x+y)\big)^2+\big(\mathrm{N}(x-y)\big)^2 = 2\big[\mathrm{N}(x)^2+\mathrm{N}(y)^2\big]}$$

Pour établir que la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas euclidienne, il suffit de démontrer, à l'aide d'un contre-exemple, qu'elle ne vérifie pas l'identité du parallélogramme. Prenons $\mathrm{E}=\mathbb{R}^2$, $x=(1,0)$ et $y=(0,1)$. On a alors $\|x+y\|_\infty = \|(1,1)\|_\infty = 1$ et $\|x-y\|_\infty = \|(1,-1)\|_\infty = 1$. Ainsi, d'une part, $\big(\mathrm{N}(x+y)\big)^2+\big(\mathrm{N}(x-y)\big)^2 = 2$ mais, d'autre part, $2\big[\mathrm{N}(x)^2+\mathrm{N}(y)^2\big] = 4$. De ce fait

$$\boxed{\text{La norme } \|\cdot\|_\infty \text{ n'est pas euclidienne}}$$

1.b La norme 2 est euclidienne : il s'agit de la norme associée au produit scalaire canonique sur E.

Pour justifier que la norme p n'est pas euclidienne pour $p\neq 2$, reprenons la méthode de la question précédente. Posons à nouveau $\mathrm{E}=\mathbb{R}^2$, $x=(1,0)$ et $y=(0,1)$. On a alors

$$\|x\|_p = \|y\|_p = 1 \quad \text{et} \quad \|x+y\|_p = \|x-y\|_p = (1^p+1^p)^{1/p} = 2^{1/p}$$

Ainsi $$\|x+y\|_p^2+\|x-y\|_p^2 = 2\times 2^{2/p} \quad \text{et} \quad 2\left(\|x\|_p^2+\|y\|_p^2\right) = 4$$

L'identité du parallélogramme est vérifiée avec ces deux vecteurs si et seulement si $2\times 2^{2/p}=4$, c'est-à-dire si et seulement si $2^{2/p}=2$, soit $p=2$. En conclusion

$$\boxed{\text{Pour } p\neq 2, \text{ la norme } p \text{ n'est pas euclidienne.}}$$

Dans le rapport, le jury précise : « il y a une différence entre « justifier » et « montrer que » ; un « justifier » attend généralement une réponse rapide. »

Dans cette question, il n'était donc pas nécessaire de redémontrer en détail que la norme 2 est euclidienne.

2 Vérifions que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{S}}$ définit un produit scalaire sur E.

- Si $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, et si X et Y sont les matrices colonnes associées, alors

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle_{\mathrm{S}} &= {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SY} = {}^t\!\left({}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SY}\right) && \text{car } \langle x, y \rangle_{\mathrm{S}} \text{ est un réel} \\
&= {}^t\mathrm{Y}\;{}^t\mathrm{S}\,\mathrm{X} \\
&= {}^t\mathrm{Y}\,\mathrm{SX} && \text{car S est symétrique} \\
\langle x, y \rangle_{\mathrm{S}} &= \langle y, x \rangle_{\mathrm{S}}
\end{aligned}$$

  La forme $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{S}}$ est donc symétrique.

- soient $(x, x', y) \in \mathrm{E}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons X, X′ et Y les matrices colonnes associées.

$$\langle x + \lambda x', y \rangle_{\mathrm{S}} = {}^t(\mathrm{X} + \lambda \mathrm{X}')\,\mathrm{SY} = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SY} + \lambda\,{}^t\mathrm{X}'\,\mathrm{SY} = \langle x, y \rangle_{\mathrm{S}} + \lambda \langle x', y \rangle_{\mathrm{S}}$$

  ce qui prouve que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{S}}$ est linéaire à gauche. Comme $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{S}}$ est symétrique, elle est également linéaire à droite. La forme $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{S}}$ est donc bilinéaire.

- enfin, si x est un vecteur non nul et si X est sa matrice colonne associée, alors $\langle x, x \rangle = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SX} > 0$ puisque $\mathrm{S} \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{S}}$ est définie positive.

Finalement $\boxed{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{S}} \text{ définit un produit scalaire sur E.}}$

> En toute rigueur, l'objet ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SY}$ est une matrice à une ligne et une colonne, puisque ${}^t\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{S} \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Y} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Toutefois, par un procédé classique dans ce contexte, on identifie les matrices à une ligne et une colonne aux réels.

3 Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. Posons $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. De plus X et Y sont les matrices colonnes associées respectivement à x et y. Par définition du produit matriciel

$$\begin{aligned}
\mathrm{SY} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi(e_i, e_k) y_k \right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \\
&= \left(\varphi(e_i, \sum_{k=1}^{n} y_k e_k) \right)_{1 \leqslant i \leqslant n} && \text{par linéarité à droite de } \varphi \\
\mathrm{SY} &= \big(\varphi(e_i, y) \big)_{1 \leqslant i \leqslant n} && \text{par définition de } y
\end{aligned}$$

En utilisant la linéarité à gauche de φ et la définition de x, il vient

$${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SY} = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i, y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y \right) = \varphi(x, y)$$

Ensuite $${}^t\mathrm{S} = (\varphi(e_j, e_i)) = (\varphi(e_i, e_j)) = \mathrm{S}$$

en utilisant la symétrie de φ. La matrice S est donc symétrique.

Enfin, soit $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne non nulle et $x \in \mathrm{E}$ le vecteur associé. On a ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SX} = \varphi(x, x)$ et $\varphi(x, x) > 0$, puisque φ est définie positive. Ainsi, $\mathrm{S} \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On a donc démontré que

$$\boxed{\text{Pour tous vecteurs } x \text{ et } y \text{ de E, } \varphi(x, y) = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SY} \text{ et } \mathrm{S} \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}).}$$