# Mines Maths toutes filières 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Roger Mansuy (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Céline Chevalier (ENS Cachan) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Le sujet se compose de deux problèmes entièrement indépendants et balaie une large partie du programme de première année.

- Le premier problème est principalement centré sur des questions algébriques et chacune des parties peut être étudiée indépendamment des autres. La première partie permet de vérifier les connaissances théoriques sur les fonctions (dont la surjectivité et l'injectivité) à partir d'un exemple simple de fonction de la variable complexe. Cette partie est aussi l'occasion d'une étude de conique. La partie suivante est consacrée à l'étude de certains polynômes de degré 3 à racines entières et requiert davantage d'astuce que de connaissances. Les deux dernières parties permettent d'aborder l'algèbre linéaire à travers les études de sous-espaces vectoriels et d'endomorphismes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
- Le deuxième problème, plus analytique, s'articule autour de l'étude d'une suite de fonctions $(f_n)$. Après quelques généralités concernant la restriction de l'intervalle d'étude de ces fonctions, le problème se concentre sur le premier terme $f_0$ qui est étudié en détail. $f_0$ intervient ensuite de manière accessoire dans les deux parties suivantes : tout d'abord comme coefficient dans l'étude d'une équation différentielle linéaire, puis comme équation polaire d'une courbe. Une fonction annexe $g$ est introduite puis étudiée à la partie suivante. La dernière partie est consacrée à l'étude sommaire d'une suite de zéros associée à notre suite de fonctions $(f_n)$. Seule cette partie requiert les résultats des questions précédentes.

Au final, ce sujet est assez accessible, de facture classique et utilise de nombreuses connaissances dans les différents registres du programme commun aux diverses sections.

## Indications

### Premier problème

2.a Résoudre $(x + iy)^2 = 8 - 6i$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3 Montrer que $z$ est un antécédent de $h$ si et seulement si $z$ est racine d'un polynôme de degré 2 dont on calculera le discriminant.

4 Conclure à partir de la question 3.

5 Utiliser les questions 2.b ou 3.

6 Pour simplifier les calculs, on peut utiliser l'expression conjuguée.

7 Utiliser la question 6 pour obtenir l'équation de $\Gamma$.
Écrire l'équation de $\Gamma$ sous la forme d'un produit égal à 0.

9 Utiliser les relations coefficients-racines pour $\mathrm{P}_a$.

10 Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

11 Commencer par montrer que $t_3 > 0$.

12 Utiliser le fait que $t_2 = t_3$ est une racine double de $\mathrm{P}_a$.

13 Puisque $a = 1$, rechercher les racines évidentes (entières) de $\mathrm{P}_1$.

14 Calculer le déterminant de $\mathrm{M}_{x,y}$.

18 Calculer les produits des vecteurs de la base trouvée à la question précédente.

20.a Montrer puis utiliser que B est inversible.

20.b Calculer l'image des quatre vecteurs de la base canonique.

21 Trouver une matrice M telle que $\mathrm{B} \times \mathrm{M} = 0_2$ avec $0_2$ la matrice nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

### Deuxième problème

3 Distinguer les cas $n = 0$ et $n \neq 0$.

4 Utiliser les questions 2 et 3.

8 Conclure à partir de l'étude des variations de la question 7.

9 Remarquer que $f$ est de la forme $u'/u$ avec $u$ une fonction à déterminer.

12 Utiliser la question 11.

13 Comparer $-\overrightarrow{u_{-\theta}}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$.

14 Donner une paramétrisation cartésienne de l'arc en exprimant $\overrightarrow{0\mathrm{M}(\theta)}$ dans le repère $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

17 Utiliser le fait que $\sin(x)/x$ tend vers 1 quand $x$ tend vers 0.

18 Partir des développements limités de sin (à l'ordre 4) et de cos (à l'ordre 3) en 0.

19 Utiliser le fait que $g$ admet un développement limité d'ordre 1 en 0.r

21 Se servir de la question 8.

22 Remplacer $[\,0\,;\pi\,]$ dans l'énoncé par $]\,0\,;\pi\,]$. Utiliser ensuite la question 20.

23 Commencer par justifier que $h$ est continue puis calculer $h(0)$.

# Premier problème

## Étude d'une fonction

**1** Un complexe $z$ appartient à D si et seulement si $z - 2\mathrm{i} \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $z \neq 2\mathrm{i}$. D'où

$$\boxed{\mathrm{D} = \mathbb{C} \smallsetminus \{2\mathrm{i}\}}$$

**2.a** Soient $x$ et $y$ deux réels. Puisque $(x+\mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$, le complexe $x + \mathrm{i}y$ est une racine carrée de $8 - 6\mathrm{i}$ si l'on a les relations suivantes :

$$2xy = -6 \qquad x^2 - y^2 = 8$$

En particulier, en substituant $y$ dans la seconde équation à l'aide de la première, on trouve qu'il est nécessaire que $x$ soit solution de $x^2 - (-6/2x)^2 = 8$ et donc de $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Puisque cette dernière équation est bicarrée, on pose $\mathrm{X} = x^2$ et on cherche les solutions de l'équation $\mathrm{X}^2 - 8\mathrm{X} - 9 = 0$, à savoir 9 et $-1$. Les seules valeurs possibles pour $x$ sont donc 3 et $-3$. À ces valeurs de $x$ correspondent respectivement les valeurs $-1$ et 1 pour $y$. Comme la vérification est immédiate, on en déduit que

$$\boxed{\text{Les racines carrées complexes de } 8 - 6\mathrm{i} \text{ sont } 3 - \mathrm{i} \text{ et } -3 + \mathrm{i}.}$$

> On remarque que, bien évidemment, ces deux racines sont opposées.

**2.b** Soit $z \in \mathrm{D}$ tel que $f(z) = 1 + \mathrm{i}$. Alors on a $z^2 = (z - 2\mathrm{i})(1 + \mathrm{i})$ et en simplifiant, $z^2 - (1 + \mathrm{i})z - 2 + 2\mathrm{i} = 0$. Le discriminant de ce polynôme est $8 - 6\mathrm{i}$ et ses racines carrées ont été calculées à la question 2.a. On en déduit les racines

$$\frac{1 + \mathrm{i} + 3 - \mathrm{i}}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{1 + \mathrm{i} - 3 + \mathrm{i}}{2} = -1 + \mathrm{i}$$

En conclusion, $\boxed{\text{Les antécédents de } 1 + \mathrm{i} \text{ par } f \text{ sont } 2 \text{ et } -1 + \mathrm{i}.}$

**3** Soit $h$ un complexe. Un complexe $z \in \mathrm{D}$ est un antécédent de $h$ par $f$ si $f(z) = h$, c'est-à-dire $z^2 - h(z - 2\mathrm{i}) = 0$. Le discriminant de ce polynôme est $(-h)^2 - 4(2\mathrm{i}h) = h(h - 8\mathrm{i})$. Par conséquent :

- Si $h$ est différent de 0 ou de $8\mathrm{i}$, le polynôme admet deux racines distinctes.
- Si $h = 0$ ou $h = 8\mathrm{i}$, le polynôme n'admet qu'une seule racine.

Dans chacun de ces cas, $2\mathrm{i}$ n'est pas racine. Donc

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Tout complexe } h \text{ admet deux antécédents distincts de } h \text{ par } f \text{ sauf} \\ 0 \text{ et } 8\mathrm{i} \text{ qui n'en admettent qu'un seul.}\end{array}}$$

**4** D'après la question précédente, tout point de $\mathbb{C}$ admet au moins un antécédent par $f$ dans D. D'où

$$\boxed{f(\mathrm{D}) = \mathbb{C} \text{ et } f \text{ est surjective de D dans } \mathbb{C}.}$$

**5** $f$ n'est pas injective de D dans $\mathbb{C}$ car on a vu à la question 2.b qu'elle admet deux antécédents pour $1+\mathrm{i}$ (et plus généralement que tout nombre complexe différent de 0 et $8\mathrm{i}$ admet deux antécédents).

**6** En multipliant le numérateur et le dénominateur du premier terme par $\overline{z}+2\mathrm{i}$, on trouve l'expression plus simple

$$g(z) = z^2(\overline{z}+2\mathrm{i}) + z^3 = z(z\overline{z}+2\mathrm{i}z) + z^3 = z|z|^2 + 2\mathrm{i}z^2 + z^3$$

Si l'on pose maintenant $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x$ et $y$ deux réels, on trouve

$$|z|^2 = x^2 + y^2$$

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$$

$$\text{et} \quad z^3 = x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2y - y^3)$$

Il suffit maintenant de combiner ces résultats pour obtenir

$$\begin{aligned} g(z) &= (x+\mathrm{i}y)(x^2+y^2) + 2\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)^2 + x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2y - y^3) \\ &= 2x^3 - 2xy^2 - 4xy + \mathrm{i}(4x^2y + 2x^2 - 2y^2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La partie réelle de } g(z) \text{ est } 2x^3 - 2xy^2 - 4xy, \\ \text{la partie imaginaire est } 4x^2y + 2x^2 - 2y^2.\end{array}}$$

**7** Soit $z \in \mathbb{C}$. $g(z)$ est un imaginaire pur si sa partie réelle est nulle. Par conséquent, la question 6 permet d'affirmer que $\Gamma$ admet pour équation

$$x^3 - xy^2 - 2xy = 0$$

En mettant $x$ en facteur dans le membre de gauche, on trouve que cette équation est satisfaite si $x = 0$ ou si $x^2 - y^2 - 2y = 0$ (qui s'écrit aussi $-x^2 + (y+1)^2 = 1$ en reconnaissant $y^2 + 2y$ comme le début du développement de $(y+1)^2$). On trouve donc que $\Gamma$ est inclus dans la réunion de la droite $\Delta$ d'équation

$$x = 0$$

et la conique C d'équation

$$-x^2 + (y+1)^2 = 1$$

En fait, on a montré qu'un point M d'affixe $x+\mathrm{i}y$ appartient à $\Gamma$ si, et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites : $x + iy \neq 2\mathrm{i}$ et M appartient à la réunion $\Delta \cup \mathrm{C}$. Or le point d'affixe $2\mathrm{i}$ appartient à $\Delta$. D'où

$$\boxed{\Gamma = (\Delta \smallsetminus \{2\mathrm{i}\}) \cup \mathrm{C} \quad \text{avec} \quad \Delta = \mathrm{i}\mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathrm{C} = \{x+\mathrm{i}y / -x^2 + (y+1)^2 = 1\}}$$

**8** C est la conique d'équation cartésienne réduite $-x^2 + (y+1)^2 = 1$, c'est donc une hyperbole de centre $\Omega$ $(0,-1)$, d'axes $(\Omega, \overrightarrow{e_1})$ et $(\Omega, \overrightarrow{e_2})$. Posons $\mathrm{Y} = y + 1$. La demi-distance focale d'une hyperbole d'équation réduite

$$-x^2/a^2 + \mathrm{Y}^2/b^2 = 1$$

est $c = \sqrt{a^2+b^2}$ et l'excentricité vaut $e = c/a$.

Ici, on obtient $c = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ donc les foyers sont $(0, \sqrt{2})$ et $(0, -\sqrt{2})$ et l'excentricité $e = \sqrt{2}/1 = \sqrt{2}$.