Mines Maths MPSI 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Céline Mazoit (Professeur agrégé) ; il a été relu par Céline Chevalier (ENS Cachan) et Walter Appel (Professeur en CPGE).

Ce sujet comporte deux problèmes indépendants : l'un d'analyse, l'autre d'algèbre.

Le problème d'analyse porte sur les fonctions de la forme $t \mapsto t^n \ln^\alpha(t)$. Il est divisé en trois parties indépendantes :

- la première a pour thème l'étude d'un arc paramétré ;
- la deuxième traite du calcul de primitives par récurrence à l'aide d'intégrations par parties ;
- la troisième permet de caractériser certains ensembles de fonctions comme ensembles des solutions d'une équation différentielle linéaire, en s'appuyant sur l'étude d'équations différentielles linéaires du premier et du second ordre.

Le problème d'algèbre est divisé en quatre parties très largement indépendantes.

- La première permet d'établir un résultat d'arithmétique qui sera utilisé à la fin de la troisième partie.
- La deuxième porte sur le calcul de puissances de matrices, en particulier au travers de la formule du binôme, et aboutit (sans le dire explicitement) au calcul d'une exponentielle de matrice.
- La troisième concerne l'étude d'un endomorphisme de translation sur un espace vectoriel de fonctions et conduit à l'écriture de la matrice de cet endomorphisme dans une base donnée.
- Enfin, la dernière partie porte sur un changement de base : dans la nouvelle base considérée, l'endomorphisme de la troisième partie a une écriture matricielle particulièrement simple (il s'agit en fait de la décomposition de Jordan).

Ce sujet ne présente pas de difficulté majeure mais il fait appel à des notions très variées du programme de première année : arc paramétré, développement limité, équivalent, primitives, équations différentielles, arithmétique, calcul matriciel, algèbre linéaire : il est donc particulièrement intéressant pour des révisions. Les méthodes de réduction d'endomorphisme utilisées dans le deuxième problème font l'objet de nombreux problèmes de concours.

Indications

Problème 1

4 Pour x, prendre des équivalents, et pour y, faire un développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+u)$.
Pour étudier la nature du point singulier, regarder les monômes de plus petit degré dans les développements de x et de y.

6.a Résoudre $x(t) = y(t)$.

7 Pour $\mathrm{Z}_1(x)$, intégrer par parties et utiliser le calcul de Z_0.

8 Intégrer par parties.

9 Raisonner par récurrence en utilisant le résultat de la question 8.

10 Montrer le résultat pour les éléments d'une famille génératrice simple de $\mathcal{N}_\alpha^n$ en utilisant les fonctions Z_n.

11 Utiliser la solution générale d'une équation de la forme $y' + f(x)y = 0$.

12.a Utiliser la formule de la dérivée d'une composée.

12.b Effectuer le changement de variables $x = e^u$.

12.c Utiliser la solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

13.b $\mathrm{P}^{n+1}(y) = \mathrm{P}\big(\mathrm{P}^n(y)\big)$.

Problème 2

4 Utiliser le théorème de Gauss.

6 Calculer N^2 et N^3.
Écrire J_λ sous la forme $\lambda\mathrm{I} + \mathrm{N}$.

10.a Se ramener au cas des polynômes.

11.a Penser à la formule du binôme de Newton.

12 Utiliser le résultat de la question 11.a.

13 $\det(\mathrm{A}^p) = \det(\mathrm{A})^p$.

14 Utiliser l'étude faite à la partie I.

15.b Penser à la formule du binôme de Newton.

15.c Utiliser le résultat de la question 10.b.

15.d Procéder par récurrence.

16 Utiliser le résultat de la question 15.b.

19 L'application $\theta \mapsto e^{2i\pi\theta}$ est une surjection de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des complexes de module 1.

Problème 1 : analyse

I. Étude d'un arc paramétré

1 Comme $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln^3(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln^2(t) = 0$,

$$\boxed{\text{Les fonctions } x \text{ et } y \text{ sont continues en 0 si et seulement si } \lambda = 0.}$$

2 Pour $t > 0$, on obtient

$$x'(t) = 1.\ln^3(t) + t.3\ln^2(t)\frac{1}{t} = \ln^2(t)\big(\ln(t)+3\big)$$

et

$$y'(t) = 1.\ln^2(t) + t.2\ln(t)\frac{1}{t} = \ln(t)\big(\ln(t)+2\big)$$

$$\boxed{\forall t > 0 \qquad x'(t) = \ln^2(t)\big(\ln(t)+3\big) \quad \text{et} \quad y'(t) = \ln(t)\big(\ln(t)+2\big)}$$

Étudions maintenant le signe des fonctions dérivées x' et y'.

t	0		$\frac{1}{e^3}$		1		$+\infty$
$\ln^2(t)$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	
$\ln(t)+3$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x'(t)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$+$	

t	0		$\frac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
$\ln(t)$	$\Vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$\ln(t)+2$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$y'(t)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

3 Le résultat de la question 2 permet d'obtenir le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{1}{e^3}$		$\frac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
$x'(t)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	
$y'(t)$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$\Vert\ 0$	$\searrow$	$-\frac{27}{e^3}$	$\nearrow$	$-\frac{8}{e^2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$\Vert\ 0$	$\nearrow$	$\frac{9}{e^3}$	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4 On a $\ln(1+u) \underset{u\to 0^+}{\sim} u$, d'où $\ln^3(1+u) \underset{u\to 0^+}{\sim} u^3$. De plus, $1+u \underset{u\to 0^+}{\sim} 1$, ce qui permet de conclure que $(1+u)\ln^3(1+u) \underset{u\to 0^+}{\sim} u^3$.

> On demande un développement limité de la fonction y et non un équivalent comme pour x. On utilise donc un développement limité de $\ln(1+u)$.

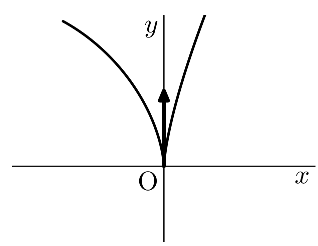
Le développement limité de $\ln(1+u)$ à l'ordre 2 s'écrit $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2)$, d'où

$$\begin{aligned} y(1+u) &= (1+u)\ln^2(1+u) \\ &= (1+u)\Big(u - \frac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2)\Big)^2 \\ &= (1+u)\big(u^2 - u^3 + \mathrm{o}(u^3)\big) \\ &= u^2 - u^3 + u^3 + \mathrm{o}(u^3) \\ y(1+u) &= u^2 + \mathrm{o}(u^3) \end{aligned}$$

Au final, $$\boxed{x(1+u) \underset{u\to 0^+}{\sim} u^3 \qquad \text{et} \qquad y(1+u) = u^2 + \mathrm{o}(u^3)}$$

Le point associé au paramètre t_0 d'un arc paramétré $f : t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ est dit singulier si les deux dérivées $x'(t_0)$ et $y'(t_0)$ sont nulles. Les résultats de la question 2 montrent que le seul point singulier de l'arc f est obtenu pour $t = 1$. Comme le degré du premier coefficient non nul du développement limité de x est impair et que celui du développement de y est pair,

La courbe $\mathcal{C}$ admet un point de rebroussement de première espèce pour $t = 1$ avec une demi-tangente verticale.



5 Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ $\qquad \dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t\ln^2(t)}{t\ln^3(t)} = \dfrac{1}{\ln(t)}$.

Or $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} \ln(t) = -\infty$, donc

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0^+ \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = 0^-}$$

L'arc $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses comme direction asymptotique, et une demi-tangente horizontale de vecteur directeur $(-1, 0)$ au point de paramètre $t = 0$.

6.a Un point $\big(x(t), y(t)\big)$ de l'arc $\mathcal{C}$ appartient à la droite Δ si $x(t) = y(t)$.

$$\begin{aligned} x(t) - y(t) &= t\ln^3(t) - t\ln^2(t) \\ &= t\ln^2(t)\big(\ln(t) - 1\big) \end{aligned}$$