X/ENS Maths PSI 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Dujardin (ENS Cachan) ; il a été relu par Juliette Leloup (ENS Ulm) et Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE).

Ce problème se compose de quatre parties de longueur et de difficulté comparables. La quatrième partie est toutefois indépendante des trois premières et utilise des outils assez différents de celles-ci ; un candidat en difficulté dans le début de l'épreuve pourra avoir intérêt à y consacrer un peu de temps.

- La première partie est consacrée à l'étude de suites échelonnées en degré de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, qui sont orthogonaux pour un produit scalaire de poids w.
- La deuxième partie vient compléter la précédente. On y prouve en particulier que les polynômes d'une telle suite (dite w-orthogonale échelonnée) sont scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$, on précise la localisation de ces racines et on montre qu'elles ne dépendent pas de la suite w-orthogonale échelonnée considérée.
- La troisième partie est consacrée aux formules de quadrature de Gauss que l'on obtient à partir de ces racines. On montre notamment que si w est strictement positive sur $[\,a\,;b\,]$, alors l'ensemble des racines des polynômes de la suite est dense dans $[\,a\,;b\,]$.
- Enfin, dans la quatrième partie, on munit, sans vraiment le dire, un sous-espace de l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ contenant les fonctions polynomiales d'un produit scalaire construit à partir d'un poids strictement positif sur $\mathbb{R}^+$. On y exhibe ensuite une fonction continue de ce sous-espace orthogonale à tous les polynômes.

Ce problème, plutôt long, est l'occasion d'utiliser nombre de notions issues des cours de première et deuxième années, notamment l'intégration sur un intervalle non borné de $\mathbb{R}$, les intégrales à paramètre, les espaces préhilbertiens, les polynômes à coefficients réels, un peu de réduction des endomorphismes, de calcul matriciel et de dualité en dimension finie. Par ailleurs, le thème des polynômes orthogonaux est assez fréquent aux écrits des concours et cette épreuve pourra, à ce titre également, constituer un bon entraînement.

Indications

Première partie

1.b Montrer que $\mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)w(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(x^{-2})$ et $\mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)w(x) = \underset{x\to-\infty}{\mathrm{o}}(x^{-2})$.

2.a Construire une telle famille de proche en proche à partir de la base canonique de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ en projetant orthogonalement à chaque étape le vecteur X^{n+1} sur le sous-espace $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ de l'espace euclidien $(\mathbb{R}_{n+1}[\mathrm{X}], \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_w)$.

2.b Raisonner par récurrence.

3.a Remarquer que $(\mathrm{XP}_n\,|\,\mathrm{Q})_w = (\mathrm{XQ}\,|\,\mathrm{P}_n)_w$ et utiliser le fait que la famille $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 0}$ est w-orthogonale.

3.b Pour $n \geqslant 1$, décomposer le vecteur XP_n dans la base $(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_{n+1})$ de $\mathbb{R}_{n+1}[\mathrm{X}]$ et utiliser la question précédente.

3.c Utiliser la question précédente.

Deuxième partie

4.a Utiliser la décomposition de P_n en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

4.b Raisonner par l'absurde pour montrer que P_n vérifie les propriétés demandées.

5.a Utiliser le résultat de la question 2.a.

5.b Utiliser le fait que pour tout $n \geqslant 1$, $\gamma_n = \alpha_{n-1}$ ainsi que l'identité (1) de la question 3.b.

5.c Utiliser le résultat de la question 4.b ainsi que celui de la question précédente.

6.a Pour exprimer $(x\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}$, utiliser la formule faisant intervenir la comatrice de la matrice $x\mathrm{I}_n - \mathrm{A}$.

6.b Utiliser la question précédente et diagonaliser la matrice A à l'aide de la base orthogonale de $\mathbb{R}^n$ $(u_1, \ldots, u_n)$ formée de vecteurs propres de A.

6.c Utiliser la question précédente et montrer qu'il existe un indice i_0 pour lequel le produit scalaire $\langle u_{i_0}, e_n\rangle$ est non nul.

6.d Penser au théorème des valeurs intermédiaires.

7.a Se servir de la relation (1) pour montrer que les polynômes P_n et P_{n-1} n'ont pas de racine commune. Ensuite, utiliser les résultats des questions 5 et 6 avec $\mathrm{A} = \mathrm{T}_n$ et $\mathrm{B} = \mathrm{T}_{n-1}$.

Troisième partie

8 Montrer que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une famille libre de n vecteurs du dual de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$.

9.a Pour l'unicité, utiliser le fait qu'un polynôme non nul de degré inférieur à $n-1$ a au plus $n-1$ racines.

9.c Utiliser la question précédente et décomposer R dans la base antéduale de la base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ du dual de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$.

9.d Appliquer le résultat de la question précédente aux carrés des polynômes de la base antéduale de la base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

10.a Construire une suite croissante de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues affines par morceaux sur J, constantes égales à -1 sur $\mathrm{J} \smallsetminus \left]\, s\,;t\,\right[$ et telles que

$$\int_a^b f_n(x)w(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

On pourra choisir f_n constante égale à n sur un intervalle où $w > 0$.

10.b Raisonner par l'absurde et utiliser la question précédente.

Quatrième partie

11.a Utiliser le théorème de Weierstrass rappelé dans le préambule de l'énoncé.

11.b Utiliser la question précédente.

12.a Montrer que l'intégrande est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0, et dominée par x^{-2} au voisinage de $+\infty$.

12.b Effectuer le changement de variables $y = x^\mu$.

12.c Utiliser un théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre sur des segments de la forme $[\,-\beta\,;\beta\,]$ où $\beta \in \left]\,0\,;\pi/2\,\right[$.

12.d Calculer la dérivée partielle de K_n par rapport à α et utiliser une intégration par parties afin de montrer qu'elle est nulle.

12.e Utiliser la question précédente.

12.f Introduire pour $\mu \in \left]\,0\,;1/2\,\right[$ la fonction w_μ définie pour $x \geqslant 0$ par

$$w_\mu(x) = \exp(-x^\mu \cos(\pi\mu))$$

et pour $x < 0$ par $w_\mu(x) = 0$. Montrer que $w_\mu \in \mathcal{W}_\mathrm{J}$. En considérant la fonction f_μ continue sur J définie par

$$f_\mu(x) = -\sin(x^\mu \sin(\pi\mu))$$

montrer que w_μ ne possède pas la propriété (D_J).

Première partie

1.a Montrons que la fonction

$$w\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{-x^2} \end{cases}$$

est un élément de l'ensemble $\mathcal{W}$. Cette fonction est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

- Elle est positive sur $\mathbb{R}$; par suite, elle vérifie (i).
- Elle ne s'annule pas sur l'intervalle ouvert non vide $\mathbb{R}$; ainsi, elle vérifie (ii).
- Enfin, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a en utilisant les théorèmes de croissance comparée des fonctions de référence,

$$x^n e^{-x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad x^n e^{-x^2} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

  donc w vérifie (iii).

On a finalement montré que $\boxed{w \in \mathcal{W}}$

> $\mathcal{W}$ contient aussi des fonctions moins régulières et qui peuvent s'annuler plus souvent, comme par exemple la fonction caractéristique de tout segment de $\mathbb{R}$ non-réduit à un point.

1.b Montrons que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, l'application

$$\varphi_w(\mathrm{P})\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{P}(x)w(x) \end{cases}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, alors $\varphi_w(\mathrm{P})$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Par suite, $\varphi_w(\mathrm{P})$ est intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. Si de plus $\mathrm{P} = 0$, alors $\varphi_w(\mathrm{P})$ est identiquement nulle et est ainsi intégrable sur $\mathbb{R}$. Supposons donc $\mathrm{P} \neq 0$ et soit $d \in \mathbb{N}$ le degré du polynôme P. Écrivons

$$\mathrm{P} = a_d\mathrm{X}^d + a_{d-1}\mathrm{X}^{d-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0$$

Puisque w vérifie (iii), il vient que pour tout $i \in \{0,\ldots,d\}$,

$$x^2x^iw(x) = x^{2+i}w(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$$

Ainsi, par combinaison linéaire,

$$x^2\mathrm{P}(x)w(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$$

Par conséquent, l'application $\varphi_w(\mathrm{P})$ est négligeable devant l'application $x \mapsto x^{-2}$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$. Par un théorème de comparaison de fonctions positives, on obtient que l'application $x \mapsto |\mathrm{P}(x)w(x)|$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$. Par suite, l'application $\varphi_w(\mathrm{P})$ est (absolument) intégrable au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$. On en déduit qu'il existe M_1 et M_2 strictement positifs tels que $\varphi_w(\mathrm{P})$ est intégrable sur $]-\infty\,; -\mathrm{M}_1\,]$ et sur $[\,\mathrm{M}_2\,; +\infty\,[$. Puisqu'en outre $\varphi_w(\mathrm{P})$ est intégrable sur $[-\mathrm{M}_1\,; \mathrm{M}_2\,]$, il vient que $\varphi_w(\mathrm{P})$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.