Centrale Maths 1 PSI 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Denis Ravaille (ENS Cachan) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (Professeur agrégé) et Vincent Perrier (ENS Cachan).

Ce sujet est composé de cinq parties de tailles très différentes. L'objectif est d'y étudier l'équation différentielle

$$y'' - \frac{1}{1+t^\alpha} y' + y = h \tag{$\mathbf{E}_{\alpha,\mathbf{h}}$}$$

où h est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et α un réel supérieur à 1. On s'intéresse notamment au comportement à l'infini des solutions ainsi qu'à diverses notions de stabilité de $(\mathbf{E}_{\alpha,\mathbf{h}})$.

- Plus précisément, dans la première partie, on étudie l'équation différentielle
$$y'' + y = h$$
et on fait appel aux techniques classiques de résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre 2. Les résultats qui y sont établis ne sont pas réutilisés dans le reste du sujet, à l'exception de ceux de la question V.B.

- Dans la deuxième partie, on étudie le comportement à l'infini des solutions de $(\mathbf{E}_{\alpha,\mathbf{0}})$ pour $\alpha > 1$. La démarche qui est adoptée est au cœur du sujet : à l'aide d'un relèvement angulaire et de calculs d'intégrales, elle permet d'obtenir un équivalent en l'infini des solutions de $(\mathbf{E}_{\alpha,\mathbf{0}})$.

- La troisième partie s'appuie sur les résultats établis dans la deuxième pour déterminer la stabilité ou l'instabilité de cette équation différentielle selon différentes définitions données dans l'énoncé. De manière générale, une équation est dite stable quand on peut contrôler la norme ($\mathscr{L}^1$ ou infinie) de ses solutions lorsque certains de ses paramètres (conditions initiales, second membre ou coefficients) varient. On s'appuie particulièrement sur la manipulation du wronskien d'un système fondamental de solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre.

- Dans la quatrième partie, on étudie le comportement à l'infini des solutions de l'équation différentielle $(\mathbf{E}_{\mathbf{1},\mathbf{0}})$. On y utilise les résultats sur le relèvement angulaire établis dans la deuxième partie et on suit une démarche relativement similaire.

- Enfin, dans la dernière partie, très courte, on étudie les diverses notions de stabilité définies dans ce sujet dans le cas particulier de l'équation différentielle $(\mathbf{E}_{\mathbf{1},\mathbf{0}})$. On s'appuie, pour ce faire, sur les résultats établis dans la deuxième et la quatrième partie concernant le comportement à l'infini des équations différentielles $(\mathbf{E}_{\alpha,\mathbf{0}})$ et $(\mathbf{E}_{\mathbf{1},\mathbf{0}})$.

Ce sujet est relativement long et un peu calculatoire. Il peut cependant s'avérer un bon entraînement pour revoir tout ce qui concerne les équations différentielles linéaires. Par ailleurs, il est fréquent que les rédacteurs d'un sujet y utilisent des notations ou y définissent des notions qui sont spécifiques au thème abordé. C'est le cas de ce sujet et il peut donc permettre de s'entraîner à « entrer » dans les définitions et les notations propres à une thématique particulière.

Indications

Partie I

I.A.1 Résoudre l'équation caractéristique associée à $(\mathbf{F_0})$.

I.A.2 Chercher une solution particulière sous la forme $y_0(t) = a(t)\sin t$ avec a polynôme de degré 1.

I.A.3 Commencer par montrer que les solutions de $y'' + y = 0$ et de $y'' + y = \sin t$ sont respectivement de la forme

$$f\ :\ t \mapsto \mathrm{A}\cos t + \mathrm{B}\sin t \qquad \text{et} \qquad g\ :\ t \mapsto \mathrm{A}\cos t + \mathrm{B}\sin t - (t\cos t)/2$$

Chercher ensuite des solutions sous la forme

$$\begin{cases} \forall t \in [\,2k\pi\,;(2k+1)\pi\,] & y(t) = a_{2k}\cos t + b_{2k}\sin t - \dfrac{t}{2}\cos t \\ \forall t \in [\,(2k+1)\pi\,;(2k+2)\pi\,] & y(t) = a_{2k+1}\cos t + b_{2k+1}\sin t \end{cases}$$

et trouver des relations sur les a_k et les b_k pour que la fonction y soit de classe $\mathscr{C}^1$ en $k\pi$, où k est un entier, en distinguant les cas où k est pair ou impair.

I.B Écrire le complexe $z = a + ib$ sous forme trigonométrique.

I.C Décomposer le sinus de manière à obtenir une expression de f_0 ne faisant plus intervenir d'intégrale à paramètre.

I.D Utiliser la question précédente.

I.E Se ramener à une équation du type $y'' + y = \cos t$ et utiliser le résultat de la question I.A.2. Étudier alors la quantité $g(t)/t$.

Partie II

II.B.1 Montrer que g'/g est continue. Dériver ensuite $g e^{-\mathrm{A}}$.

II.B.2 Écrire la constante complexe sous forme exponentielle.

II.C.1 Considérer $\mathrm{F} = f + \mathrm{i}f'$. Montrer par l'absurde que F ne s'annule pas. Utiliser ensuite le résultat de la question II.B.2.

II.C.2 En dérivant l'expression de f obtenue à la question II.C.1, déterminer deux expressions différentes pour f'. Faire de même pour f''. Les combiner ensuite de manière à éliminer r'.

II.C.3 Utiliser les mêmes expressions qu'à la question II.C.2.

II.C.4 Montrer que r est croissante, puis majorée.

II.C.5 Intégrer l'équation $(\mathbf{1})$. Montrer que l'intégrale obtenue est convergente.

II.C.6 Utiliser l'expression de f trouvée dans la question II.C.1, puis les résultats de convergence établis aux questions II.C.4 et II.C.5.

Partie III

III.A Utiliser la question II.C.4 pour majorer la norme infinie de f.

III.B.1 Dériver w. Déduire de l'équation différentielle trouvée l'expression de w. Borner l'intégrale qui intervient dans cette expression.

III.B.2 Utiliser la méthode de variation de la constante.

III.B.4 Utiliser les deux questions précédentes pour obtenir une forme intégrale de la fonction f, puis utiliser la question II.C.4 pour justifier la majoration des fonctions f_1 et f_2.

III.C.1 Faire apparaître g' dans l'expression de Φ''. Utiliser ensuite la question I.E pour obtenir l'expression de g'.

III.C.2 Couper l'intégrale en deux, sur des intervalles bien choisis.

III.C.3 Utiliser le raisonnement de la question III.B.4 pour retrouver

$$|\Phi(t)| \leqslant \mathrm{C} \int_0^t |h(u)| \, \mathrm{d}u$$

III.C.4 Raisonner par l'absurde en utilisant les questions I.E et III.C.3.

III.D.2 Utiliser la question II.C.4 pour majorer g'. Scinder l'intégrale sur $[\,0\,;t\,]$ en deux intégrales sur $[\,0\,;1\,]$ et sur $[\,1\,;t\,]$.

III.D.3 Utiliser la question III.B.4 et la continuité des fonctions I, J et K.

Partie IV

IV.B Poser $\mathrm{G} = g + \mathrm{i}g'$ et utiliser le résultat de la question II.B.2.

IV.C Procéder comme aux questions II.C.2 et II.C.4.

IV.D Procéder comme aux questions II.C.3 et II.C.5.

IV.E Procéder comme à la question II.C.6.

Partie V

V.A Utiliser la question IV.E pour trouver un contre-exemple.

V.B Déterminer h_λ telle que f_λ soit la solution de $(\mathbf{E_{1,h_\lambda}})$ de conditions initiales $(0, 0)$. Utiliser alors le fait que f_λ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

I. Étude de l'équation $y'' + y = h$

I.A.1 Cherchons les solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre homogène et à coefficients constants réels

$$y'' + y = 0 \qquad (\mathbf{F_0})$$

> Il est important de savoir résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre homogène et à coefficients constants réels. À toute équation du type $ay'' + by' + cy = 0$, on associe l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.
>
> - Si cette équation possède deux racines réelles distinctes α et β, alors les solutions de l'équation différentielle sont les combinaisons linéaires réelles des fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{\beta t}$.
> - Si elle ne possède qu'une racine réelle double α, les solutions de l'équation différentielle sont les combinaisons linéaires réelles de $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$ et $t \mapsto t\mathrm{e}^{\alpha t}$.
> - Enfin, si l'équation admet deux racines complexes conjuguées $\alpha = a + \mathrm{i}b$ et $\overline{\alpha}$, de parties réelle a et imaginaire b, alors les solutions de l'équation différentielle sont les combinaisons linéaires réelles des parties réelles et imaginaires de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$, à savoir des fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{at} \cos bt$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{at} \sin bt$.

L'équation différentielle a ici pour équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$, dont les racines sont i et $-$i. Une solution générale de $(\mathbf{F_0})$ est donc une combinaison linéaire réelle des fonctions $t \mapsto \cos t$ et $t \mapsto \sin t$. Autrement dit, l'ensemble des solutions de $(\mathbf{F_0})$ est

$$\boxed{\{t \mapsto a \cos t + b \sin t,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}}$$

I.A.2 Les solutions de l'équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants

$$y'' + y = h \qquad (\mathbf{F_h})$$

sont la somme d'une solution particulière de cette équation et des solutions générales de l'équation différentielle homogène, qui n'est autre ici que $(\mathbf{F_0})$.

> Résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants non homogène revient toujours à trouver une solution particulière, puis à additionner celle-ci aux solutions générales de l'équation homogène associée.
>
> Tout l'enjeu revient donc à trouver une solution particulière. Pour ce faire, il existe plusieurs méthodes. La plus générale est la méthode dite de variation de la constante. Elle ne s'applique qu'aux systèmes linéaires d'ordre 1, du type
>
> $$\mathrm{Y}' = \mathrm{AY} + \mathrm{H}$$
>
> où Y, H sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ et A une matrice (dont les coefficients peuvent éventuellement dépendre de t). Il est toujours possible de se ramener à un tel système.