CCP Maths 2 PSI 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Hervé Diet (ENS Cachan) ; il a été relu par Hicham Qasmi (ENS Lyon) et Vincent Perrier (ENS Cachan).

Le sujet se compose d'un unique problème. Il propose d'étudier les matrices $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{i,j\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]}$ dont les coefficients appartiennent à $\{0, 1\}$, satisfaisant les conditions suivantes :

- M est symétrique.
- chaque ligne de la matrice contient un nombre δ fixé de coefficients égaux à 1.
- Pour tous entiers i, j appartenant à $[\![\,1\,;\,n\,]\!]$,

$$m_{i,j} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\exists! k \qquad m_{i,k} = m_{j,k} = 1)$$

Le problème comporte trois parties.

- La première introduit une matrice carrée de dimension 5 vérifiant les conditions voulues. Il s'agit ensuite, grâce à des calculs effectués sur cette matrice, de dégager quelques propriétés de telles matrices. On calculera par exemple le carré de cette matrice, un de ses polynômes annulateurs et l'une de ses valeurs propres ainsi que l'espace propre associé.
- Une étude générale de ces matrices en dimension n est menée dans la deuxième partie, en commençant par une étude spectrale approfondie. Les dernières questions visent à montrer, en introduisant des outils arithmétiques, que ces matrices n'existent que dans un nombre restreint de dimensions.
- La dernière partie guide le candidat pour trouver une deuxième matrice vérifiant les propriétés. Pour cela, on introduit une matrice intermédiaire définie grâce à des produits scalaires sur un espace de dimension 5. Il faut ensuite trouver une combinaison judicieuse faisant intervenir cette matrice et d'autres matrices classiques, et qui vérifie toutes les conditions énoncées. La recherche est guidée par les résultats de la partie précédente.

Cet énoncé n'est pas très long et aucune question ne nécessite beaucoup de rédaction. Il requiert cependant une bonne maîtrise du calcul matriciel, une connaissance approfondie de la théorie de la réduction des endomorphismes, ainsi que certains outils d'arithmétique. Il n'est donc pas très difficile et il contient des notions que tout candidat se doit absolument de maîtriser.

Indications

Partie I

I.1 Simplifier les calculs à l'aide de la symétrie de M.

I.4 Utiliser le résultat de la question I.2 pour isoler J_5 puis utiliser cette égalité et celle de la question I.3 .

I.5 Penser au lien entre valeurs propres et polynôme annulateur.

I.6 Poser et résoudre les systèmes possibles reliant les valeurs propres et leurs vecteurs propres.

Partie II

II.2.1 Calculer l'image d'une base de $\mathbb{R}^n$.

II.2.2 Utiliser le résultat de la question II.1.3 pour calculer $f \circ f$ d'une seconde façon.

II.2.4 Calculer $f \circ f(v)$.

II.3.2 Commencer par expliciter le système vérifié par les x_i, puis combiner linéairement ces équations.

II.3.3 Calculer $f \circ f(u)$.

II.3.4 Écrire la matrice de f dans une base de vecteurs propres.

II.4.2 Se rappeler des relations racines-coefficients pour un polynôme.

II.4.2 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ se décompose en une somme directe de sous-espaces propres de f.

II.5.1 Utiliser le résultat de la question II.4.3 et raisonner par l'absurde.

II.6.1 Utiliser le résultat de la question II.4.1.

II.6.3 Commencer par exprimer $(c^2 + 3)$ et $(c^2 - 5)$ en fonction de p.

Partie III

III.4.1 Pour choisir M, regarder le tableau de la question II.6.4 pour déterminer le nombre de 1 et de 0 par ligne.

Partie I

I.1 Soit N le carré de M et soit $n_{i,j}$ ses coefficients. Alors, d'après la définition du produit de matrices, on a la relation suivante entre les coefficients de N et ceux de M

$$n_{i,j} = \sum_{k=1}^{5} m_{i,k} m_{k,j}$$

Comme M est symétrique, N l'est aussi car

$$^t\mathrm{N} = {}^t\mathrm{M}\ {}^t\mathrm{M} = \mathrm{MM} = \mathrm{N}$$

Il suffit donc de calculer les coefficients au-dessus de la diagonale de N et d'en déduire les autres par symétrie :

$$\begin{cases} n_{1,1} = 2, n_{1,2} = 0, n_{1,3} = 1, n_{1,4} = 0, n_{1,5} = 1 \\ n_{2,2} = 2, n_{2,3} = 0, n_{2,4} = 1, n_{2,5} = 1 \\ n_{3,3} = 2, n_{3,4} = 1, n_{3,5} = 0 \\ n_{4,4} = 2, n_{4,5} = 0 \\ n_{5,5} = 2 \end{cases}$$

Finalement,
$$\boxed{\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

I.2 D'après le résultat de la question précédente, on a

$$\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il faut maintenant exprimer ce résultat en fonction de J_5 et I_5. La structure simple et ordonnée de la matrice $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M}$ dont les coefficients ne sont que des 1 ou des 2 montre que $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M}$ est la somme de J_5 et de la matrice identité, donc

$$\boxed{\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \mathrm{J}_5 + \mathrm{I}_5}$$

I.3 Soit $\mathrm{A} = {\mathrm{J}_5}^2 = (a_{i,j})$ et $\mathrm{J}_5 = (b_{i,j})$. Alors

$$\forall (i,j) \in [\![\, 1\,;\, 5 \,]\!]^2 \qquad a_{i,j} = \sum_{k=1}^{5} b_{i,k} b_{k,j}$$

Or, tous les coefficients de J_5 valent 1, donc

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{5} 1 = 5$$

Par suite,
$$\boxed{{\mathrm{J}_5}^2 = 5\mathrm{J}_5}$$

I.4 D'après le résultat de la question I.2, on peut écrire que

$$\mathrm{J}_5 = \mathrm{M}^2 + \mathrm{M} - \mathrm{I}_5$$

L'égalité obtenue à la question précédente se réécrit

$$(\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} - \mathrm{I}_5)^2 = 5(\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} - \mathrm{I}_5)$$

soit $$\mathrm{M}^4 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{I}_5 + 2\mathrm{M}^3 - 2\mathrm{M}^2 - 2\mathrm{M} = 5\mathrm{M}^2 + 5\mathrm{M} - 5\mathrm{I}_5$$

puis $$\mathrm{M}^4 + 2\mathrm{M}^3 - 6\mathrm{M}^2 - 7\mathrm{M} + 6\mathrm{I}_5 = 0$$

Ainsi, un polynôme annulateur de M est

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^3 - 6\mathrm{X}^2 - 7\mathrm{X} + 6}$$

I.5 Puisque P est un polynôme annulateur de M, les valeurs propres de M sont racines de P. Comme -3 et 2 sont deux racines évidentes de P, on peut factoriser P par $(\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}+3)$ pour trouver les deux dernières racines. Cette factorisation de P s'écrit sous la forme

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}+3)(a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c)$$

où a, b et c sont trois réels que l'on va déterminer. Le terme dominant de P est X^4, et le terme dominant de la forme factorisée de P est $a\mathrm{X}^4$, d'où $a = 1$. Le polynôme P prend la valeur 6 en 0, et sa forme factorisée prend la valeur $-6c$ en 0. On en déduit que $c = -1$. Enfin, en évaluant P en 1, on obtient la valeur -4, tandis que la forme factorisée de P prend la valeur $-4b$. Il vient donc $b = 1$. Ainsi, le polynôme P se factorise sous la forme

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}+3)(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 1)$$

> On a utilisé ici le résultat suivant. Si P est un polynôme annulateur de M et si λ est une valeur propre de M, alors $\mathrm{P}(\lambda) = 0$. Ce résultat se démontre de la manière suivante : si λ est une valeur propre, alors il existe un vecteur non nul V tel que $\mathrm{MV} = \lambda\mathrm{V}$. En itérant cette égalité, on obtient
>
> $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{M}^k\mathrm{V} = \lambda^k\mathrm{V}$$
>
> et on en déduit par combinaison linéaire que $\mathrm{P}(\mathrm{M})\mathrm{V} = \mathrm{P}(\lambda)\mathrm{V} = 0$. Comme V est non nul, il vient $\mathrm{P}(\lambda) = 0$.

Les deux autres racines de P sont les racines du trinôme $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 1$ soit $(-1+\sqrt{5})/2$ et $(-1-\sqrt{5})/2$. Les 4 valeurs propres possibles de M sont donc

$$\boxed{2,\ \ -3,\ \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}),\ \ \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})}$$

I.6 D'après le résultat de la question précédente, les deux seules valeurs propres entières possibles pour M sont 2 et -3. Cherchons un vecteur propre X pour la valeur propre 2, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_5)$. X vérifie l'équation

$$\mathrm{MX} = 2\mathrm{X}$$

ce qui se traduit par le système $$\left\{\begin{array}{l} x_2 + x_4 = 2x_1 \\ x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_2 + x_5 = 2x_3 \\ x_1 + x_5 = 2x_4 \\ x_3 + x_4 = 2x_5 \end{array}\right.$$