X Physique 2 PC 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benoît Lobry (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Georges Rolland (Professeur agrégé) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Cette épreuve porte sur la réflexion et la transmission d'une onde électromagnétique par des milieux conducteurs. Le problème forme un ensemble cohérent et de longueur raisonnable :

- Dans la première partie, on caractérise la propagation d'une onde électromagnétique dans un solide considéré comme un milieu diélectrique conducteur. Après avoir établi les équations de propagation, on s'intéresse au coefficient de réflexion, que l'on confronte à des résultats expérimentaux. Il s'agit de la partie la plus abordable de l'épreuve.
- La deuxième partie a pour but de modéliser l'équilibre de formation de structures stables (appelées trions), comportant une charge positive et deux électrons, à partir de simples paires constituées d'une charge positive et d'un électron. C'est une partie originale qui demande de la réflexion.
- Enfin, la troisième partie considère l'influence d'un champ magnétique sur la transmission d'une onde électromagnétique par une couche conductrice d'épaisseur nanométrique. Les calculs y ont la part belle.

Chaque partie est indépendante et se termine par une analyse physique ou une confrontation à des résultats expérimentaux.

Les concepts physiques mis en jeu dans ce problème relèvent de l'électromagnétisme (ondes électromagnétiques dans les milieux), de la mécanique du point (interaction coulombienne) et de la thermochimie. L'énoncé est rarement directif. Les situations envisagées et la formulation des questions sont pour le moins originales. C'est pourquoi, même si les raisonnements demandés sont finalement classiques, ce problème n'en demande pas moins maîtrise et compréhension du cours.

On doit donc considérer qu'il s'agit d'un problème relativement difficile et certainement déroutant pour un élève habitué à une formulation plus proche du cours. À ce titre, il peut constituer, pour des élèves possédant une maîtrise suffisante du programme, un bon entraînement aux concours.

Indications

Première partie

I.1 Par « régime permanent », comprendre régime sinusoïdal établi.

I.2 Pour $z > 0$, appliquer en régime sinusoïdal établi les équations de Maxwell rappelées en début d'énoncé. Ne pas considérer les charges libres deux fois au travers des vecteurs courant $\overrightarrow{\jmath}_{\text{libre}}$ et polarisation $\overrightarrow{\mathrm{P}}_{\text{el}}$ mais choisir l'une ou l'autre de ces descriptions équivalentes.

I.3 Passer les expressions de $\mathrm{E}_x(z)$ au crible des équations obtenues à la question précédente.

I.4 Calculer $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ à partir de l'équation de Maxwell-Faraday et utiliser les relations de passage à l'interface en $z = 0$.

I.5 Déduire de la question I.4 les relations vérifiées par r et t. Lorsque $\omega < \omega_{\mathrm{p}}$, q est un imaginaire pur.

I.6 Calculer χ_{r} à partir de la limite R_0 de $\mathrm{R}(\lambda)$ aux faibles longueurs d'onde et considérer la longueur d'onde λ_0 pour laquelle $\mathrm{R}(\lambda)$ s'annule pour trouver m.

Deuxième partie

II.1.2 Utiliser l'uniformité de $\overrightarrow{\mathrm{E}}_{\text{em}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ pour que ne subsistent que le vecteur position $\overrightarrow{r}_{\mathrm{G}}$ de G et ses dérivées avec

$$\overrightarrow{r}_{\mathrm{G}} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_i \overrightarrow{r_i}$$

II.1.3 Montrer que le travail fourni par $\overrightarrow{\mathrm{E}}_{\text{em}}$ pendant $\mathrm{d}t$ peut s'écrire

$$\delta \mathrm{W}_{\text{em}} = -\mathrm{N}e\,\overrightarrow{\mathrm{E}}_{\text{em}} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{r}_{\mathrm{G}}$$

II.2.1 Partir de la configuration d'énergie minimale où les électrons sont diamétralement opposés. Écrire le principe fondamental de la dynamique pour chaque électron et montrer par l'absurde que l'hypothèse où les deux électrons suivent des orbites de rayons différents entraîne une rupture de l'alignement.

II.3.1 Évaluer la valeur de μ à $\mathrm{T} = 0$ K à partir de $\mu = \mathrm{G}/\mathrm{N}$ avec $\mathrm{G} = \mathrm{U} + \mathrm{PV} - \mathrm{TS}$.

II.3.5 Il faut considérer $n_{\mathrm{X}}(0) \ll n_{\mathrm{e}}(0)$ et non $n_{\mathrm{X}^-}(0) \ll n_{\mathrm{e}}(0)$ comme il est écrit. Sous quelle forme doit-on trouver les paires X à $\mathrm{T} = 0$ K ? Que se passe-t-il quand T augmente ?

Troisième partie

III.5 Quelle est l'influence du champ $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ sur les trajectoires électroniques dans le plan (yz) ?

III.6 Il faut considérer qu'a priori $\delta \mathrm{T}_{\text{res}} \ll 1$, puis qu'à la résonance, pour l'application numérique,

$$k = \frac{\omega_{\text{res}}}{c} \simeq \frac{\omega_0}{c}$$

Réflexion et transmission d'une couche électromagnétique par des couches conductrices d'épaisseurs nanométriques

I. Propagation d'une onde électromagnétique dans un « plasma solide »

I.1 Les électrons sont mis en mouvement selon $\overrightarrow{e_x}$ par la seule force électrique. En régime sinusoïdal établi, on note, comme pour le champ électrique,

$$\overrightarrow{v}(z,t) = v_x(z)\exp(i\omega t)\,\overrightarrow{e_x}$$

la vitesse des électrons de conduction à la cote z et à l'instant t. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron de conduction s'écrit alors

$$m\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t}(z,t) = -e\,\overrightarrow{\mathrm{E}}(z,t) \qquad \text{d'où} \qquad im\omega\,\overrightarrow{v}(z,t) = -e\,\overrightarrow{\mathrm{E}}(z,t)$$

Ainsi,
$$\overrightarrow{\jmath}_{\text{libre}}(z,t) = -ne\,\overrightarrow{v}(z,t) = \frac{ne^2}{im\omega}\,\overrightarrow{\mathrm{E}}(z,t)$$

Or, selon l'énoncé, $\overrightarrow{\jmath}_{\text{libre}} = \dfrac{\partial\,\overrightarrow{\mathrm{P}}_{\text{el}}}{\partial t} = i\omega\,\overrightarrow{\mathrm{P}}_{\text{el}}$, donc finalement

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{P}}_{\text{el}} = \varepsilon_0\chi_{\text{el}}(\omega)\,\overrightarrow{\mathrm{E}} \qquad \text{avec} \qquad \chi_{\text{el}}(\omega) = -\frac{ne^2}{m\omega^2\varepsilon_0}}$$

> Par « régime permanent », il faut comprendre ici régime sinusoïdal établi à la pulsation ω du champ électrique.
> Avec un champ électrique polarisé selon $\overrightarrow{e_x}$ et fonction de z, le mouvement des électrons se fait selon $\overrightarrow{e_x}$ à cote z fixée, donc dans un champ électrique d'amplitude constante. Dans le cas général, il aurait fallu supposer que le mouvement de l'électron se faisait sur une distance caractéristique faible devant la longueur d'onde afin que l'amplitude du champ électrique soit indépendante de la position de l'électron.

I.2 Pour $z > 0$, le solide est le siège d'un courant de conduction $\overrightarrow{\jmath}_{\text{libre}}$ évalué à la question précédente et il possède une polarisation due aux électrons élastiquement liés

$$\overrightarrow{\mathrm{P}}_{\text{r}} = \varepsilon_0\chi_{\text{r}}\,\overrightarrow{\mathrm{E}}$$

Par ailleurs, d'après l'expression du champ électrique,

$$\text{div}\,\overrightarrow{\mathrm{E}}(z,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{E}_x(z)\exp(i\omega t)\right] = 0$$

D'après le rappel en début d'énoncé, les équations de Maxwell en régime sinusoïdal établi y sont donc

$$\begin{cases} \operatorname{div} \overrightarrow{\mathrm{E}} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = -i\omega\overrightarrow{\mathrm{B}} \\ \operatorname{div} \overrightarrow{\mathrm{B}} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} = \mu_0 \left[\dfrac{ne^2}{im\omega}\overrightarrow{\mathrm{E}} + i\omega\varepsilon_0(1+\chi_{\mathrm{r}})\overrightarrow{\mathrm{E}}\right] \end{cases}$$

On en déduit

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = -i\omega\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} = \mu_0\varepsilon_0\left[-\frac{ne^2}{m\varepsilon_0} + \omega^2(1+\chi_{\mathrm{r}})\right]\overrightarrow{\mathrm{E}}$$

Or, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\operatorname{div}\overrightarrow{\mathrm{E}} - \Delta\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\Delta\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$ donc

$$-\Delta\overrightarrow{\mathrm{E}} = \frac{\omega^2}{c^2}\left[-\frac{ne^2}{m\omega^2\varepsilon_0} + (1+\chi_{\mathrm{r}})\right]\overrightarrow{\mathrm{E}}$$

Enfin, $\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_x(z)\exp(i\omega t)\,\overrightarrow{e_x}$ et $\Delta\overrightarrow{\mathrm{E}} = \dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{E}_x}{\mathrm{d}z^2}(z)\exp(i\omega t)\,\overrightarrow{e_x}$

Il vient donc comme demandé pour $z > 0$:

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{E}_x}{\mathrm{d}z^2} = \frac{\omega^2}{c^2}(1+\chi_{\mathrm{r}})\left(1 - \frac{{\omega_{\mathrm{p}}}^2}{\omega^2}\right)\mathrm{E}_x \qquad \text{avec} \qquad \omega_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0(1+\chi_{\mathrm{r}})}}}$$

Pour $z < 0$, l'onde se propage dans le vide : $n = 0$, $\omega_{\mathrm{p}} = 0$ et $\chi_{\mathrm{r}} = 0$. En particularisant le résultat obtenu dans le solide, cela donne pour $z < 0$:

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{E}_x}{\mathrm{d}z^2} = \frac{\omega^2}{c^2}\mathrm{E}_x}$$

> Dans le solide pour $z > 0$, on pouvait considérer la « polarisation » totale
> $$\overrightarrow{\mathrm{P}} = \overrightarrow{\mathrm{P}}_{\mathrm{el}} + \overrightarrow{\mathrm{P}}_{\mathrm{r}} = \varepsilon_0(\chi_{\mathrm{el}}(\omega) + \chi_{\mathrm{r}})\overrightarrow{\mathrm{E}}$$
> à condition de ne plus prendre en compte $\overrightarrow{\jmath}_{\mathrm{libre}}$.
> Il est préférable pour l'instant de conserver des inégalités strictes sur z. Les conditions de passage en $z = 0$ sont envisagées à la question I.4.

I.3 Pour $z < 0$, dans le vide, le champ électrique s'écrit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{E}}(z,t) &= \mathrm{E}_x(z)\exp(i\omega t)\,\overrightarrow{e_x} \\ &= \exp i(\omega t - kz)\,\overrightarrow{e_x} + r\exp i(\omega t + kz)\,\overrightarrow{e_x}\end{aligned}$$

Cela correspond à la superposition d'un champ électrique incident d'amplitude unitaire se propageant selon $+\overrightarrow{e_z}$ et d'un champ électrique réfléchi d'amplitude r se propageant selon $-\overrightarrow{e_z}$. De même pour $z > 0$, dans le solide, le champ électrique est

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}(z,t) = t\exp i(\omega t - qz)\,\overrightarrow{e_x}$$