Mines Maths 1 PC 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Céline Chevalier (ENS Cachan) ; il a été relu par Pierre Bel (ENS Cachan) et David Lecomte (Professeur en CPGE).

Ce sujet a failli être passionnant. Il annonce en effet qu'il étudie les fonctions hypergéométriques, qui sont un thème classique en mathématiques depuis leur introduction par Gauss en 1812. Hélas, cette bonne idée est sabotée : l'énoncé ne dit pas ce qu'est une fonction hypergéométrique, la vue d'ensemble de la démarche est laissée en exercice au candidat, et au final on ne profite pas des résultat acquis pour montrer quelques applications. Nous remédierons à ces lacunes au fil du corrigé.

Toutefois, si l'on fait abstraction du folklore « hypergéométrique », nous avons là un sujet de concours bien conçu, qui alterne les théorèmes et les calculs, qui récompense le soin et la maîtrise du programme, sans oublier de proposer des questions qui permettent de grappiller des points même si l'on ne comprend rien aux questions difficiles. Il se décompose en trois parties de longueurs comparables et de difficulté croissante :

- La première partie introduit une fonction K définie par une intégrale dépendant d'un paramètre :

  $$\mathrm{K} : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^\alpha\,(1+t)^\beta\,\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t$$

  et deux fonctions auxiliaires (I_1 et I_2) dont le calcul suffit à connaître K. Après les vérifications d'usage (intégrabilité, dérivabilité, classe $\mathscr{C}^1$), on montre que connaître I_1 et I_2 revient à savoir résoudre un système différentiel (S). En vue de préparer la deuxième partie, on introduit encore une fonction L dont les fonctions auxiliaires J_1 et J_2 vérifient elles aussi (S). La lourdeur des notations est le principal obstacle dans cette partie – pour qui connaît ses théorèmes.
- La deuxième partie ramène l'étude de (S) à la résolution d'une équation différentielle du premier ordre (question 14), dont on détermine une condition initiale (question 13) et la solution générale (question 15). Les questions 8 à 12 ne servent qu'à préparer cet aboutissement. Ce sujet était également posé en filière PSI, avec une question supplémentaire à la fin de la partie II consistant à transposer sur (S) les résultats de la question 15.
- La troisième partie montre que les fonctions de la première partie peuvent s'exprimer comme des séries entières hypergéométriques.

Au final, cette épreuve constitue un très bon entraînement aux écrits grâce à sa démarche progressive et raisonnablement guidée, à son recours aux résultats déjà obtenus et à son utilisation intensive des théorèmes du cours.

Indications

Partie I

1 Utiliser les règles d'intégrabilité de $t \longmapsto 1/t^{\alpha}$ en 0 et en $+\infty$.

3 Montrer que I_1 et I_2 satisfont les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégral.

4 Intégrer K par parties en dérivant $t \longmapsto t^{\alpha}(1+t)^{\beta}$ et en intégrant $t \longmapsto \mathrm{e}^{-zt}$.

5 Rassembler les égalités obtenues aux questions 3 et 4.

6 Dériver deux fois les formules de la question 3 et une fois celles de la question 4, puis les combiner.

7 Raisonner comme dans les quatre questions précédentes en prenant garde à ne pas refaire des calculs inutiles.

Partie II

8 Appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $t \longmapsto \left(1+\dfrac{t}{z}\right)^{\beta-1}$.

9 Calculer la différence demandée en effectuant le changement de variable $u = zt$. Majorer ensuite la fonction située sous l'intégrale.

10 Effectuer le changement de variable $t = u/z - 1$.

11 Raisonner comme à la question 9.

12 Utiliser la question précédente et montrer que la deuxième partie de l'intégrale est négligeable devant la première.

13 Appliquer les résultats d'équivalence des questions 9 et 12 aux fonctions intervenant dans la définition de w.

14 Calculer la dérivée de w et remplacer les expressions obtenues à l'aide des résultats des questions 5 et 7.

15 Résoudre l'équation obtenue à la question précédente, et utiliser la question 13 pour déterminer la constante.

Partie III

16 Développer $(1+t)^{\beta-1}$ à l'aide de la formule du binôme.

17 Calculer la limite de u_{n+1}/u_n.

18 Développer en série entière la fonction exponentielle et utiliser le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions. À l'aide des rappels du début de l'énoncé, faire intervenir les coefficients (a,k).

19 Dériver terme à terme la fonction y et ajuster les indices.

20 Évaluer l'équation différentielle en y et déduire les valeurs de a' et b' du résultat de la question 19.

I. Fonctions hypergéométriques

> Une *série hypergéométrique* est une série dans laquelle le quotient des coefficients successifs a_n/a_{n-1} est une fraction rationnelle en n, c'est-à-dire qu'il existe des polynômes P et Q indépendants de n tels que
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\mathrm{P}(n)}{\mathrm{Q}(n)}$$
>
> Leur nom provient du fait que ce sont des généralisations des *séries géométriques*, de la forme $\sum z^n$, dans lesquelles les quotients successifs des coefficients sont égaux à 1, donc constants.
>
> Si la série est convergente, la fonction qui en découle est appelée *fonction hypergéométrique*. On montrera à la question 18 que les intégrales définies dans cette partie sont hypergéométriques (voir aussi la remarque clôturant le corrigé).

$\boxed{1}$ Soit $z \in \mathbb{R}_+^*$. Notons f la fonction $t \longmapsto t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}\,\mathrm{e}^{-zt}$. Elle est continue (donc intégrable) sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+$, en tant que produit de fonctions qui le sont, si et seulement si $\alpha > 1$. Il reste à étudier l'intégrabilité en $+\infty$. Comme z est strictement positif, par croissances comparées, on sait que

$$t^2 f(t) = t^{\alpha+1}(1+t)^{\beta-1}\,\mathrm{e}^{-zt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

quelles que soient les valeurs de α et β ; autrement dit, $f(t) = \mathrm{o}(t^{-2})$ en $+\infty$. Comme $t \longmapsto t^{-2}$ est intégrable en $+\infty$, on en déduit qu'il en est de même pour f.

$$\boxed{t \longmapsto t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}\,\mathrm{e}^{-zt} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+ \text{ si et seulement si } \alpha > 1.}$$

Au vu des résultats à suivre dans le problème, et surtout de l'hypothèse qui suit la question 2, il paraît légitime de penser que l'énoncé comporte une erreur dans cette question : déterminons à présent des conditions nécessaires et suffisantes sur α et β pour que la fonction f soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ plutôt que sur $\mathbb{R}_+$.

> Une fois que l'on a repéré l'erreur d'énoncé, il peut sembler étonnant de procéder ainsi, en répondant d'abord à la question posée, puis à la question que l'on considère exacte. Si l'erreur de l'énoncé rendait la question impossible, on ne répondrait alors pas à la question posée, mais directement à la question corrigée. Ici, la question posée est inutile pour la suite mais faisable, et même facile, donc on la traite avant de répondre (en donnant ses raisons) à la question que l'on suppose être correcte.

La fonction f est continue (donc intégrable) sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, en tant que produit de fonctions qui le sont. Il reste à étudier l'intégrabilité en 0 et en $+\infty$.

- **En 0 :** on a $f(t) \sim t^{\alpha-1}$, donc f est intégrable si et seulement si $\alpha - 1 > -1$, c'est-à-dire $\alpha > 0$.

- **En $+\infty$:** z étant strictement positif, on en déduit par croissances comparées que $f(t) = \mathrm{o}(t^{-2})$ quelles que soient les valeurs de α et de β. Par suite, la fonction f est intégrable.

$$\boxed{t \longmapsto t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}\,\mathrm{e}^{-zt} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ si et seulement si } \alpha > 0.}$$

> Rappelons un résultat classique et fort utile d'intégrabilité :
> - Si $b \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto 1/(b-t)^\alpha$ est intégrable en b si et seulement si $\alpha < 1$.
> - La fonction $t \longmapsto 1/t^\alpha$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

2 Soit $z \in \mathbb{R}_+^*$. Notons g la fonction $t \longmapsto (-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}\,\mathrm{e}^{-zt}$. Elle est continue (donc intégrable) sur tout segment strictement inclus dans $]-1\,;0[$, comme produit de fonctions qui le sont. Il reste à montrer l'intégrabilité en -1 et en 0.

- **En -1 :** on a l'équivalent $g(t) \sim (1+t)^{\beta-1}\,\mathrm{e}^{z}$, donc g est intégrable si et seulement si $\beta - 1 > -1$, c'est-à-dire $\beta > 0$.
- **En 0 :** on a $g(t) \sim (-t)^{\alpha-1}$, donc g est intégrable si et seulement si $\alpha - 1 > -1$, c'est-à-dire $\alpha > 0$.

$$\boxed{\begin{array}{l} t \longmapsto (-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}\,\mathrm{e}^{-zt} \text{ est intégrable sur } [-1\,;0] \\ \text{si et seulement si } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0. \end{array}}$$

3 Intéressons-nous d'abord à I_1. Soit A un réel strictement positif. On définit la fonction de deux variables

$$g : \begin{array}{rcl} [\,\mathrm{A}\,;+\infty\,[\times]\,0\,;+\infty\,[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (z,t) & \longmapsto & t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta}\,\mathrm{e}^{-zt} \end{array}$$

Elle est de classe $\mathscr{C}^1$ en sa première variable et on a

$$\forall z \geqslant \mathrm{A} \quad \forall t > 0 \qquad \frac{\partial g}{\partial z}(z,t) = -t^{\alpha}(1+t)^{\beta}\,\mathrm{e}^{-zt}$$

Par suite, $$\forall z \geqslant \mathrm{A} \quad \forall t > 0 \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial z}(z,t)\right| \leqslant t^{\alpha}(1+t)^{\beta}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}t}$$

Le membre de droite est une fonction de t uniquement, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question 1 puisque $\alpha + 1 > 0$ et $\beta + 1 > 0$. On a également

$$\forall z \geqslant \mathrm{A} \quad \forall t > 0 \qquad \big|g(z,t)\big| \leqslant t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}t}$$

À nouveau, le membre de droite est une fonction de t, intégrable d'après la question 1 puisque $\alpha > 0$ et $\beta + 1 > 0$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral : I_1 est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,\mathrm{A}\,;+\infty\,[$. De plus,

$$\forall z \geqslant \mathrm{A} \qquad \mathrm{I}_1'(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial z}(z,t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} t^{\alpha}(1+t)^{\beta}\,\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{K}(z)$$

> Le théorème de dérivation fournit à moindre coût l'existence de K.