E3A Maths B PC 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jérôme Gärtner (ENS Cachan) ; il a été relu par Céline Chevalier (ENS Cachan) et Chloé Dousset (ENS Cachan).

Ce sujet relativement long pour une épreuve de trois heures aborde plusieurs points essentiels du programme, y compris la géométrie. Il est composé de trois exercices.

- Le premier porte sur les intégrales généralisées et utilise un peu d'algèbre. Le niveau est moyen pour ce type d'épreuve et la difficulté consiste souvent à justifier l'existence des intégrales et les calculs qui sont effectués. La dernière question demande du recul sur ce qui a été démontré.
- Le deuxième exercice, d'algèbre linéaire, est calculatoire. Il porte principalement sur la réduction des endomorphismes et ne présente pas de difficulté particulière, sauf dans la justification du fait qu'une matrice est diagonalisable.
- Le dernier exercice consiste en l'étude d'un lieu associé à une courbe en coordonnées polaires. Classique de géométrie, il a son lot de calculs. Il y est fait usage de nombreuses formules sur les arcs paramétrés et les coniques, points du cours indispensables ici et qui ont fait la différence le jour de l'épreuve d'après le rapport du jury : « L'étude de courbes en coordonnées polaires bien qu'au programme est ignorée d'une grande partie des candidats. Plus nombreux encore sont ceux qui ne connaissent pas l'expression de la longueur d'une courbe. »

En résumé, ce sujet est représentatif du concours E3A : calculatoire mais assez bien construit pour pouvoir classer tous les candidats. « Chaque exercice demandait l'utilisation (et donc l'énoncé) de théorèmes et définitions essentiels du cours, ce qui semblait être hors de portée d'une partie non négligeable de candidats. » C'est un bon sujet de révision.

Indications

Exercice I

1.a Utiliser les relations de comparaison.

1.b Trouver une majoration par une fonction intégrable.

3.c Ne pas oublier que φ est linéaire.

3.d Procéder par analyse et synthèse.

3.e Intégrer par parties. Attention aux justifications !

4.b.ii Se rappeler que E_2 est de dimension finie.

4.b.iii Calculer l'ensemble des valeurs propres.

4.c Utiliser la question 3.b, et vérifier que le résultat de la question 3.e est encore valable ici.

Exercice II

1.a Prouver que les valeurs propres de A sont distinctes.

2 Utiliser le fait que les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.

4.b Montrer que P définit un changement de base qui diagonalise A.

4.c Effectuer le changement de base sur les matrices vérifiant l'équation $(\mathcal{E}')$.

Exercice III

2 Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\ \mathrm{d}\theta$.

3.a Exprimer les coordonnées d'un point de la courbe en fonction de $\tan(\theta/2)$.

3.b Utiliser les coordonnées paramétriques trouvées à la question 3.a.

3.c Chercher les points de Γ qui satisfont l'équation de la tangente.

3.d Utiliser le fait que t_3 est racine de P.

3.e Trouver une équation réduite de cette conique pour pouvoir appliquer les formules du cours.

Exercice I

1.a Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[\,x\,;+\infty\,[$ donc son intégrale converge sur tout intervalle du type $[\,a\,;b\,] \subset [\,x\,;+\infty\,[$. Étudions le comportement de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ en $+\infty$: d'après le théorème de comparaison de fonctions

$$\lim_{t \to +\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t} = 0$$

Comme la fonction exponentielle est positive et que l'intégrale de la fonction $t \mapsto 1/t^2$ converge sur $[\,x\,;+\infty\,[$, on en déduit que l'intégrale de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ converge sur $[\,x\,;+\infty\,[$.

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue et positive sur $[\,x\,;+\infty\,[$ et vérifie $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{n+2}\,\mathrm{e}^{-t} = 0$. Le raisonnement ci-dessus s'applique donc et montre que

$$\boxed{\int_x^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t} \text{ converge pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

1.b La fonction $t \mapsto \cos t\ \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$. La majoration $|\cos t| \leqslant 1$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$ montre que $|\cos t\ \mathrm{e}^{-t}| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. D'après la question 1.a, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'affirmer, d'après le théorème de majoration, que

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \cos t\ \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

> Il est possible de justifier la convergence de l'intégrale de cette question en la calculant, ce qui n'était pas demandé. Le rapport du jury déplore le fait que beaucoup de candidats aient choisi cette méthode plus longue, car nécessitant deux intégrations par parties, et sans fournir les justifications adéquates.

1.c La question 1.a montre que pour tout entier n, la fonction $t \mapsto t^n$ est dans l'espace E_1 et la question 1.b montre que la fonction cosinus est dans E_1.

$$\boxed{\cos \in \mathrm{E}_1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad t \mapsto t^n \in \mathrm{E}_1}$$

La linéarité de l'intégrale permet d'affirmer par exemple que

$$\boxed{\text{Toute fonction polynomiale P est dans } \mathrm{E}_1.}$$

> Un raisonnement analogue à celui de la question 1.b montrerait que toute fonction continue et bornée appartient à E_1.

2 La fonction nulle est continue sur $\mathbb{R}$ et son intégrale sur $[\,x\,;+\infty\,[$ converge pour tout x de $\mathbb{R}$.

$$\boxed{0 \in \mathrm{E}_1}$$

Montrons que E_1 est stable par combinaison linéaire. Soient $(f,g) \in {\mathrm{E}_1}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (le corps des scalaires est $\mathbb{R}$ comme indiqué par l'énoncé). Prouvons que $f+\lambda g \in \mathrm{E}_1$. On sait déjà que $f+\lambda g$ est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les intégrales

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

existent par hypothèse. La linéarité de l'intégrale montre que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \lambda g(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe, puis que

$$\int_x^{+\infty} \left(f(t)+\lambda g(t)\right)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

converge. Ainsi, $\boxed{\mathrm{E}_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathrm{E}.}$

3.a Montrons dans un premier temps que $\varphi(f)$ appartient à E si f appartient à E_1. Soit $f \in \mathrm{E}_1$. La fonction $h : t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc

$$x \mapsto \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$$

est continue sur $\mathbb{R}$. Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\int_x^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\varphi(f) \in \mathrm{E}}$$

Montrons dans un second temps la linéarité de φ. Soient $(f,g) \in {\mathrm{E}_1}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $\varphi(f+\lambda g) = \varphi(f)+\lambda\varphi(g)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la linéarité de l'intégrale,

$$\mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \left(f(t)+\lambda g(t)\right)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \left(\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + \lambda \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)$$

Ce qui montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(f+\lambda g)(x) = \varphi(f)(x) + \lambda\,\varphi(g)(x)$.

$$\boxed{\varphi \text{ est une application linéaire de } \mathrm{E}_1 \text{ dans } \mathrm{E}.}$$

> Il est important de vérifier que l'ensemble d'arrivée fourni par l'énoncé est correct avant de montrer que l'application est linéaire.

3.b Comme la fonction $t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction

$$x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

en est la primitive qui s'annule en 0. Elle est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto f(x)\,\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi la fonction

$$x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto -f(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ car

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$