E3A Maths A PC 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Gilbert Monna (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Guillaume Dujardin (Chercheur à l'INRIA) et Tristan Poullaouec (Professeur agrégé).

Ce problème sans grande difficulté théorique est assez technique.

- Il commence par l'étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, qui fait l'objet de la partie I. On y alterne étude générale (questions I.1, I.2 et I.3), cas particulier de $\mathbb{R}_4[X]$ (question I.4) et un retour au cas général à la question I.5 avec l'étude de $\mathbb{R}_5[X]$ aux questions I.5.d et I.5.e. Les principales difficultés de cette partie sont calculatoires, puisqu'il faut manipuler des matrices 5×5 et 6×6 et surtout inverser une matrice 5×5.
- Dans la deuxième partie, on utilise l'endomorphisme étudié dans la partie I pour déterminer un développement limité d'une fonction composée, puis à la question II.2 on étudie un exemple. On passe ensuite à l'application aux séries entières et on retrouve le résultat obtenu pour les développements limités. Il n'y a toujours pas de difficultés théoriques et les propriétés sur les séries numériques et les séries entières utilisées restent élémentaires, classiques et à connaître absolument. Par contre, il y a toujours des difficultés techniques, de niveau nettement plus élevé qu'à la partie précédente. Vous trouverez par exemple deux inversions de sommation qui sont probablement ce que vous risquez de rencontrer de plus difficile en concours : cela constituera un excellent entraînement sur cette technique souvent mal connue. La partie II se termine par le calcul des sommes
$$\sum_{n=k/2}^{k} (-1)^n \binom{n}{k-n}$$
- Dans la troisième partie, on détermine un développement en série entière de la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto x + x^2$ sur des intervalles appropriés. On étend ensuite ce résultat à un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme défini entre deux ouverts du plan complexe. Cette partie est relativement difficile, surtout la dernière question. Son intérêt essentiel est de mettre en jeu des résultats de calcul différentiel que l'on a rarement l'occasion d'utiliser.

En résumé, c'est un problème intéressant à travailler pour aborder des techniques délicates et une partie du cours n'intervenant pas très souvent dans les problèmes de concours. Il peut permettre à des 5/2 d'éliminer certaines impasses.

Indications

I.2.b Déduire de la question I.2.a que tous les polynômes ne sont pas dans $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.

I.3 Utiliser la formule du binôme de Newton.

I.4.a Pour déterminer ${\mathrm{M}_4}^{-1}$, utiliser la relation $\mathrm{M}_4\mathrm{X} = \mathrm{Y} \iff \mathrm{X} = {\mathrm{M}_4}^{-1}\mathrm{Y}$.

I.4.b Utiliser l'expression de la matrice déterminée à la question I.3.b.

I.4.c Généraliser le raisonnement fait à la question I.4.a.

I.5.a Se rappeler qu'un automorphisme transforme une base en une base, ce qui permet de considérer sa matrice comme celle d'un changement de base.

I.5.b Utiliser la définition d'une matrice de changement de base.

I.5.c Établir que les réels $q_{ij} - q_{i-1,j-1} + q_{i,j+1}$ sont les coefficients des termes de degré inférieur à n d'un polynôme qui est un $\mathrm{o}(x^n)$.

I.5.d On peut déterminer la diagonale à partir des questions I.4.b et I.4.c, il suffit ensuite d'utiliser la relation vue à la question précédente.

II.1.a Utiliser l'hypothèse sur f pour exprimer $f(x + x^2)$ en fonction de P puis utiliser les questions I.1.a et I.1.c.

II.1.b Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, exprimer les coordonnées de $\varphi_n(\mathrm{P})$ en utilisant M_n puis utiliser la question I.3.b.

II.2.a Chercher une fonction f telle que $g(x) = f(x + x^2)$.

II.3.a Commencer par une représentation graphique de la fonction $x \mapsto |x + x^2|$ puis en déduire le nombre de solutions de l'équation $|x + x^2| = \mathrm{R}$. Justifier ensuite par une étude précise des équations du second degré et en déduire les ensembles cherchés. Il y a un cas où les hypothèses de l'énoncé ne permettent pas de donner une réponse unique.

II.3.b Montrer que $g_{\mathrm{N}}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} \lambda_n \sum\limits_{k=n}^{2n} \dbinom{k}{n} x^k$ puis permuter les deux sommes. Pour déterminer les bornes des sommes on peut faire un dessin.

II.3.c Exprimer $|h_{\mathrm{N}}(x) - g_{\mathrm{N}}(x)|$ puis en ajoutant des termes et en inversant les sommations (même technique qu'à la question précédente) montrer que :
$$|h_{\mathrm{N}}(x) - g_{\mathrm{N}}(x)| \leqslant \sum_{n=\mathrm{N}/2}^{\mathrm{N}} |\lambda_n| \sum_{k=\mathrm{N}}^{2n} \binom{k}{k-n} |x|^k$$

II.3.d Penser que le reste d'une série convergente tend vers 0 pour justifier que $h_{\mathrm{N}}(x)$ tend vers $f(x + x^2)$ quand N tend vers l'infini.

II.4.a Utiliser l'égalité $$\frac{1}{1 + x + x^2} = \frac{1 - x}{1 - x^3}$$

II.4.b Utiliser l'unicité du développement en série entière d'une fonction.

III.1.a Exprimer x en fonction de u en utilisant une équation du second degré.

III.1.c Exprimer x sous la forme d'une combinaison linéaire des $\mathrm{T}_n\big((x + x^2)^k\big)$ et d'un $\mathrm{o}(x^n)$ puis utiliser la question I.5.a.

III.1.d Déterminer le DSE de a^{-1} au voisinage de 0 à partir des DSE usuels puis utiliser l'unicité du DSE.

III.2.a Montrer que α définit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de Π dans $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite $]-\infty\,; -1/4\,[\times \{0\}$.

III.2.b Montrer qu'une équation cartésienne de l'image de D_k par α est
$$v^2 = (1 + 2k)^2\,(k + k^2 - u)$$

III.3 Justifier $\alpha\big(\beta(w)\big) = w$, pour tout nombre complexe w tel que $|w| < 1/4$. Montrer ensuite que $\beta(w) \in \Pi$.

Partie I

I.1.a L'application T_n est linéaire. En effet, soit (λ, μ) un couple de réels ainsi que deux polynômes

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k\, \mathrm{X}^k \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k\, \mathrm{X}^k$$

les suites $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant nulles à partir d'un certain rang. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_n(\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q}) &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda\, p_k + \mu\, q_k)\, \mathrm{X}^k \\
&= \lambda \sum_{k=0}^{n} p_k\, \mathrm{X}^k + \mu \sum_{k=0}^{n} q_k\, \mathrm{X}^k \\
\mathrm{T}_n(\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q}) &= \lambda\mathrm{T}_n(\mathrm{P}) + \mu\mathrm{T}_n(\mathrm{Q})
\end{aligned}$$

L'application T_n consiste à supprimer tous les termes de degré strictement supérieur à n, donc si le polynôme est de degré inférieur ou égal à n, on ne supprime rien et la restriction de T_n à $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est égale à l'application identité.

Si on applique une première fois T_n on obtient un polynôme de degré inférieur ou égal à n, donc une deuxième application de T_n ne change rien. Ainsi, $\mathrm{T}_n \circ \mathrm{T}_n = \mathrm{T}_n$ et

$$\boxed{\mathrm{T}_n \text{ est un projecteur.}}$$

Le rapport du jury signale que des candidats ont confondu $(\mathrm{T}_n \circ \mathrm{T}_n)(\mathrm{P})$ avec $[\mathrm{T}_n(\mathrm{P})]^2$. C'est une confusion classique à laquelle il faut prendre garde, pour une fonction à valeur dans une algèbre (ici l'algèbre des polynômes), $f^2(x)$ peut désigner $f \circ f(x)$ ou $[f(x)]^2$.

On pouvait aussi justifier l'égalité $\mathrm{T}_n \circ \mathrm{T}_n = \mathrm{T}_n$ de la manière suivante. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, c'est-à-dire qu'il est de la forme $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k\, \mathrm{X}^k$. Ainsi,

$$\mathrm{T}_n(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{n} p_k\, \mathrm{X}^k = \mathrm{P}$$

Comme $\mathrm{T}_n(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, il en découle que

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{T}_n \circ \mathrm{T}_n(\mathrm{P}) = \mathrm{T}_n\big(\mathrm{T}_n(\mathrm{P})\big) = \mathrm{T}_n(\mathrm{P})$$

si bien que $$\boxed{\mathrm{T}_n \circ \mathrm{T}_n = \mathrm{T}_n}$$

Remarquons que la restriction d'un projecteur à son image est l'identité, propriété utile pour la suite.

I.1.b Tout élément de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est dans l'image de T_n, puisqu'il est sa propre image, réciproquement, l'image de T_n est contenue dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ par définition. Par suite,

$$\boxed{\mathrm{Im}\ \mathrm{T}_n = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]}$$

La démonstration alternative suivante était aussi possible. Puisque T_n est un projecteur, on sait que $\mathrm{Im}\,(\mathrm{T}_n) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - \mathrm{T}_n)$. Or,

$$\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - \mathrm{T}_n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{T}_n(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$$

On a vu précédemment que

$$\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{T}_n(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$$

La réciproque étant immédiate, il en découle que $\mathrm{Im}\,(\mathrm{T}_n) = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

I.1.c P est dans Ker T_n si et seulement si P n'a pas de terme non nul de degré inférieur ou égal à n. Il existe alors un polynôme Q tel que

$$\mathrm{P}(x) = x^{n+1}\,\mathrm{Q}(x) = x^n\,x\mathrm{Q}(x)$$

La fonction $x \mapsto x\mathrm{Q}(x)$ est nulle en 0 et comme c'est un polynôme, elle est continue, donc $x\mathrm{Q}(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Par conséquent, $\mathrm{P}(x)$ est par définition un $\mathrm{o}(x^n)$ en 0.

Réciproquement, soit $\mathrm{P}(x) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} p_i\,x^i$ un $\mathrm{o}(x^n)$. Si P est nul, il appartient au noyau de T_n. Si P n'est pas nul, soit k le plus petit entier tel que p_k soit non nul. $\mathrm{P}(x)$ est équivalent en 0 à $p_k\,x^k$, donc $\mathrm{P}(x)/x^n$ est équivalent en 0 à $p_k\,x^{k-n}$. $\mathrm{P}(x)/x^n$ tend vers 0 quand x tend vers 0, donc k est strictement supérieur à n, ce qui entraîne que P appartient au noyau de T_n.

$$\boxed{\mathrm{P} \in \operatorname{Ker} \mathrm{T}_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{P}(x) = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \quad \text{ou} \quad \mathrm{P} = 0}$$

I.2.a Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le degré de $(\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)^k$ est égal à $2k$, donc si le degré du polynôme non nul P est égal à n, celui de $\varphi(\mathrm{P})$ est égal à $2n$.

$$\boxed{\deg \varphi(\mathrm{P}) = 2\deg \mathrm{P}}$$

> Notons que si P est le polynôme nul, alors $\varphi(\mathrm{P})$ est aussi le polynôme nul et $\deg \varphi(\mathrm{P}) = \deg \mathrm{P}$ quelle que soit la valeur que l'on choisit d'adopter pour le degré du polynôme nul. En tous cas, il ne s'agit pas d'un cas particulier bien intéressant.

I.2.b Soient λ et μ deux réels ainsi que deux polynômes

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k\,\mathrm{X}^k \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k\,\mathrm{X}^k$$

Alors,
$$\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda\,p_k + \mu\,q_k)\,\mathrm{X}^k$$

donc
$$\begin{aligned}\varphi(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda\,p_k + \mu\,q_k)\,(\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)^k\\ &= \lambda\sum_{k=0}^{+\infty} p_k\,(\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)^k + \mu\sum_{k=0}^{+\infty} q_k\,(\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)^k\\ \varphi(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q}) &= \lambda\varphi(\mathrm{P}) + \mu\varphi(\mathrm{Q})\end{aligned}$$

φ est bien un endomorphisme. Si P n'est pas le polynôme nul, il a un degré $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi(\mathrm{P})$ est de degré $2n$, donc n'est pas nul. Cela montre que le noyau de φ est réduit au vecteur nul et par conséquent,

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \varphi \text{ est injectif.}}$$

> La démonstration de la linéarité pouvait aussi utiliser la linéarité de la composition des polynômes :
>
> $$\begin{aligned}\varphi(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q}) &= (\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q})(\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)\\ &= \lambda\mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{X}^2) + \mu\mathrm{Q}(\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)\\ \varphi(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q}) &= \lambda\varphi(\mathrm{P}) + \mu\varphi(\mathrm{Q})\end{aligned}$$