Centrale Maths 1 PC 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Walter Appel (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Vincent Perrier (ENS Cachan) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Ce long sujet d'analyse porte sur les propriétés d'une suite $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux (appelés *polynômes de Legendre*) pour le produit scalaire

$$(\mathrm{P} \mid \mathrm{Q}) = \int_{-1}^{1} \overline{\mathrm{P}(t)}\, \mathrm{Q}(t)\, \mathrm{d}t$$

Il est constitué, après quelques questions préliminaires, de deux parties largement indépendantes. Toutes les propriétés de la première partie qui sont utiles dans la seconde sont en outre données par l'énoncé.

- Dans les préliminaires, on définit proprement, sur la boule unité ouverte du plan complexe, une fonction « racine carrée de $1/(1-z)$ ». Pour cela, on définit une fonction par une série entière judicieusement choisie et on vérifie qu'elle possède bien les propriétés désirées, notamment que son carré est $z \mapsto 1/(1-z)$.
- La première partie définit la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir des coefficients du développement en série entière d'une fonction, et plus précisément
$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_n(t)\, x^n$$
pour tout $x \in \,]-1\,;1\,[$ et $t \in [\,-1\,;1\,]$. On montre que la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre 2. Une longue question prouve qu'elle est orthogonale, toujours en utilisant des séries entières et en faisant un usage intense d'un théorème d'intégration terme à terme. Enfin, on montre que P_n a n zéros distincts dans $[\,-1\,;1\,]$ et que ceux-ci séparent les zéros de P_{n+1}.
Cette approche est assez originale mais, hélas, elle recèle de nombreux passages très techniques.
- La seconde partie est plus classique, et certainement plus facile à traiter si l'on connaît bien son cours. Dans un premier temps sont dérivés quelques résultats formellement proches de ceux connus sur les séries de Fourier ; sauf qu'au lieu de considérer une fonction f définie sur $[\,0\,;2\pi\,]$ et de prendre le produit scalaire avec les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{int}$, on prend le produit scalaire avec les polynômes P_n. On construit ensuite une suite de sommes de « Fourier-Legendre » dont on montre que, sous certaines conditions, elle converge vers la fonction f initiale.
Dans un second temps, on étudie la fonction
$$\mathrm{Q}_n : x \longmapsto \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{P}_n(t) - \mathrm{P}_n(x)}{t-x}\, \mathrm{d}t$$
dont on montre qu'elle est polynomiale ; on montre pour finir que la fonction $\mathrm{Q}_n/\mathrm{P}_n$ s'écrit comme une somme de fractions rationnelles (en faisant un petit crochet par la dualité) et, plus étonnant, qu'elle approche uniformément la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ quand n tend vers l'infini.

Indications

a Appliquer le cours sur le développement de $(1+x)^\alpha$. Lire attentivement l'ensemble des questions préliminaires pour vérifier son résultat.

c Montrer que la restriction de φ^2 à l'axe réel vérifie la relation donnée ; en déduire son développement en série entière, puis conclure en revenant sur $\mathbb{C}$.

d Remarquer que $\mathrm{Arg}\,(1-z) \in \left]\, -\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right[$.

e Vérifier que $\cos\big((n+2)\,\theta\big) + \cos(n\theta) = 2\cos\theta\cos\big((n+1)\theta\big)$ et en déduire une construction par récurrence de la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.B.1 Montrer que $x \mapsto \varphi(x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\varphi(x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$ satisfait la même équation différentielle que $\psi_{\cos\theta}$ et utiliser la question I.A.

I.B.4 Utiliser le développement de ψ_t en fonction des P_n, et l'équation différentielle vérifiée par ψ_t.

I.C.3.a Écrire les développements en série entière de $\ln(1+t)$ et $-\ln(1-t)$, puis en faire la somme.

I.C.3.b Ne pas oublier que $|\mathrm{P}_n(t)| \leqslant 1$ pour tout $t \in [\,-1\,;1\,]$.

I.C.3.c Montrer que deux séries entières dont les sommes sont égales sur $]\,0\,;1\,[$ ont les mêmes coefficients.

I.D.1 Montrer que P_n est orthogonal à tout polynôme de degré $\leqslant n-1$.

I.E.1 Démontrer la propriété par récurrence.

I.E.3 Remarquer que P'_{n+1} change de signe entre chaque zéro successif de P_n, et vérifier que $\mathrm{P}_n\,\mathrm{P}'_{n+1}$ est strictement positif en chaque zéro de P_{n+1}.

I.F Intégrer par parties. Utiliser le fait que AP_n et P_n sont proportionnels.

II.A.1 Projeter f sur $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$, puis décomposer ce projeté sur une base orthonormée de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ et utiliser le théorème de Pythagore.

II.A.2 Calculer $c_n(\mathrm{A}f)$. Puis utiliser l'inégalité classique $\alpha\beta \leqslant (\alpha^2+\beta^2)/2$ (on écrira que $n = n^2/n$).

II.B.1 Utiliser le théorème de Weierstrass sur l'approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par une suite de polynômes.

II.B.2 Montrer la convergence normale de la série.

II.B.3 Montrer que $(f_n \mid g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.C Montrer par récurrence que $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence (**2**) et en déduire que c'est une famille de polynômes.

II.D.1 Commencer par vérifier que $\mathrm{L}_i(a_j) = \delta_{i,j}$ puis montrer que $\mathscr{B}$ est libre.

II.D.2 Chercher à décomposer une forme ψ sous la forme $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\,\varphi_i$ et appliquer cette forme aux polynômes L_k pour déterminer les λ_k.

II.D.5 Utiliser le résultat précédent avec les polynômes 1 et ${\mathrm{L}_i}^2$.

II.E.1 Utiliser la question II.D.3 avec le polynôme $t \mapsto \dfrac{\mathrm{P}_n(t)-\mathrm{P}_n(x)}{t-x}$.

II.E.2 Expliciter $\mathrm{Q}_n(a_i)$ et $\mathrm{Q}_n(a_{i+1})$ et montrer qu'ils sont de signes opposés.

II.F.1 Utiliser la question II.D.4 avec le polynôme $t \mapsto \dfrac{t^{2n}-x^{2n}}{t-x}$.

Questions préliminaires

a On sait, d'après le cours, que si α est un réel, alors l'application $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière, que son rayon est 1 et que

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n$$

On applique ce résultat à $-x$ pour la valeur $\alpha = -1/2$ et on obtient

$$\begin{aligned}\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\,\frac{(-x)^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}\,\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité $2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n$, qui est égale à $2^n \cdot n!$; cela nous mène à

$$\begin{aligned}\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)\,!}{2^{2n}\,(n!)^2}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)\,!}{2^{2n}\,(n!)^2}\, x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}\, x^n\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}\, x^n \qquad (\text{Rayon R} = 1)}$$

b Puisque la série $\sum a_n\, z^n$ a pour rayon 1 d'après la question précédente,

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est définie (au moins) sur } \Delta.}$$

> Bien sûr, rien n'empêche que φ soit définie sur un ensemble plus large que Δ (mais inclus dans la boule fermée de centre 0 et de rayon 1). Notamment, il est relativement aisé de montrer que la série $\sum a_n (-1)^n$ est convergente (en utilisant le théorème de Leibniz sur les séries alternées et en montrant proprement que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle).
>
> En utilisant des techniques plus difficiles, comme une transformation d'Abel, on peut montrer qu'en réalité φ est définie sur la boule unité fermée privée du seul point 1.

c On sait, d'après le cours, que la fonction φ^2 se développe sous la forme d'une série entière, de rayon au moins égal à 1, et donnée par le produit de Cauchy de la série $\sum a_n\, z^n$ par elle-même :

$$\forall z \in \Delta \qquad \varphi(z)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k}$$

Considérons maintenant la restriction de φ à l'axe réel : elle vérifie, d'après le résultat de la question a,

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \varphi(x)^2 = \frac{1}{1-x}$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n = \varphi^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

et le théorème d'unicité du développement en série entière permet donc de conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_n = 1$$

On en déduit par conséquent que

$$\boxed{\forall z \in \Delta \qquad \varphi(z)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}}$$

> Le cours de deuxième année comporte un théorème d'unicité du développement en série entière d'une fonction de la variable *réelle*. Ce théorème peut parfaitement être étendu aux fonctions de la variable complexe, par exemple en passant par les restrictions des fonctions à l'axe réel, comme nous l'avons fait ; on peut également définir la notion de dérivée d'une fonction de la variable complexe et le résultat du cours reste identique : les coefficients a_n de la série entière $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, z$ sont donnés pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

d Représentons ci-dessous les ensembles Δ et $1 - \Delta = \{1 - z\ ;\ z \in \Delta\}$:

Pour tout $z \in \Delta$, la partie réelle du complexe $1 - z$ est strictement positive. Notamment, $1 - z \notin \mathbb{R}_-$ ce qui prouve que $\text{Arg}\,(1-z)$ est bien défini selon les spécifications de l'énoncé. De plus, on en déduit que $\text{Arg}\,(1-z) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$; l'argument de l'inverse d'un complexe non nul est l'opposé de celui du nombre initial : par suite

$$\text{Arg}\ (\varphi(z)) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$$

et par conséquent $$2\,\text{Arg}\ (\varphi(z)) \in \left]-\pi\,;\pi\right[$$

Or, $\text{Arg}\,(\varphi(z)^2)$ et $2\,\text{Arg}\ (\varphi(z))$ sont égaux à 2π près, et appartiennent tous deux au même intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right[$; ils sont donc égaux :

$$\text{Arg}\,(\varphi(z)^2) = 2\,\text{Arg}\ (\varphi(z))$$

On en déduit que

$$\text{Arg}\ (\varphi(z)) = \frac{1}{2}\,\text{Arg}\,(\varphi(z)^2) = \frac{1}{2}\,\text{Arg}\left(\frac{1}{1-z}\right) = -\frac{1}{2}\,\text{Arg}\,(1-z)$$