CCP Maths 1 PC 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tristan Poullaouec (ENS Cachan) ; il a été relu par Thomas Vidick (ENS Ulm) et Walter Appel (Professeur en CPGE).

Ce sujet est constitué de trois parties pouvant être abordées séparément, bien que la troisième constitue la suite logique de la deuxième.

- Dans la première partie, on redémontre quelques propriétés fondamentales des projecteurs orthogonaux dans un espace vectoriel euclidien et l'on cherche à caractériser le fait que deux de ces projecteurs commutent.
- Dans la deuxième partie, on s'intéresse à une équation linéaire $f(x) = v$. Si le vecteur v n'appartient pas à l'image de f, il est évident que cette équation ne possède aucune solution. On peut cependant chercher des vecteurs x tels que $f(x)$ soit « proche » de v. On montre alors que l'équation admet des *pseudo-solutions*, c'est-à-dire des vecteurs x minimisant la quantité $\|f(x) - v\|$, et l'on caractérise de manière précise ces pseudo-solutions. L'application à la minimisation d'une fonction de deux variables vient illustrer l'intérêt de cette notion.
- On considère enfin dans la troisième partie des pseudo-solutions particulières, ce qui permet de définir pour toute application linéaire f une application *pseudo-inverse*. Le problème s'achève avec la détermination des matrices des pseudo-inverses pour deux exemples.

Cette épreuve est d'une longueur tout à fait raisonnable et la seule difficulté notable est que l'on traite de matrices non carrées et d'applications linéaires entre deux espaces vectoriels de dimensions différentes ; hormis cela, une bonne connaissance du cours suffit pour traiter la plupart des questions. On établit d'ailleurs durant ce sujet plusieurs propriétés que tout élève de classe préparatoire a normalement déjà eu l'occasion de croiser. Notons enfin que ce problème est tout à fait accessible à des élèves motivés de mathématiques supérieures, mis à part quelques questions portant sur la réduction des endomorphismes (questions I.6.b, III.5.c et III.6).

Indications

Partie I

I.2.c Noter que $\mathrm{Im}\, p \perp \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - p)$, et utiliser le théorème de Pythagore.

I.4.a Calculer $p \circ r(u)$.

I.4.b Montrer que $\|r(u)\|^2 = (r(u)|u)$ et utiliser la question I.4.a.

I.4.c Utiliser les questions I.2.c et I.4.b.

I.6.b Pour l'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$, prouver que les valeurs propres de A sont aussi des valeurs propres de PR ; en déduire que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$.

Partie II

II.1 Montrer que les pseudo-solutions de $(*)$ sont les antécédents par f du projeté orthogonal de v sur $\mathrm{Im}\, f$.

II.3 Noter que les pseudo-solutions de $(*)$ sont caractérisées par $f(x_0) - v \in \mathrm{Im}\, f^\perp$

II.6.a Utiliser l'application $f : (\lambda, \mu) \mapsto \lambda\, a + \mu\, b$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

II.6.c Reprendre la relation établie à la question II.3 ; noter que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\,(a, b)$.

Partie III

III.1.a Faire usage des relations $\mathrm{F} = \mathrm{Im}\, f \oplus \big(\mathrm{Im}\, f\big)^\perp$ et $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, f \oplus \big(\mathrm{Ker}\, f\big)^\perp$.

III.1.c S'appuyer sur le résultat de la question III.1.b.

III.2 Commencer par identifier $\mathrm{Ker}\, g$. Appliquer ensuite le théorème du rang à f et g pour calculer la dimension de $\mathrm{Im}\, g$.

III.3.a Utiliser la définition de g pour montrer que $f(x) - f\big(g \circ f(x)\big) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

III.4 Caractériser les vecteurs colonnes de $\mathrm{G} = \mathrm{Mat}\,(g)$ au moyen de produits scalaires : montrer d'abord que $\mathrm{AG} = \mathrm{I}_2$ grâce à la question III.3.b ; exhiber ensuite un vecteur normal à $\mathrm{Im}\, g = \big(\mathrm{Ker}\, f\big)^\perp$. Ne pas hésiter enfin à employer le produit vectoriel !

III.5.b Montrer que $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}\,) \subset \mathrm{Ker}\,(g - \lambda^{-1}\,\mathrm{Id}\,)$ pour toute valeur propre λ non nulle de f.

III.5.c Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale, et réciproquement.

III.6 Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de f. En déduire la matrice de g grâce aux résultats des questions III.5.b et III.5.c.

PARTIE I

I.1 C'est une question de cours. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots e_n)$ une base orthonormale de E, et considérons deux vecteurs $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$ de matrices respectives $\mathrm{X} = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathrm{Y} = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$ dans cette base. On a alors

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

L'évaluation des produits matriciels ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{Y}$ et ${}^t\mathrm{Y}\,\mathrm{X}$ conduit au même résultat (on identifie ici les matrices carrées d'ordre 1 aux nombres réels). Ainsi

$$\boxed{(x|y) = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{Y} = {}^t\mathrm{Y}\,\mathrm{X}}$$

I.2 Par définition, le projecteur orthogonal p de F sur H a pour image $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{H}$ et pour noyau $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{H}^\perp$. Le projecteur associé $\mathrm{Id} - p$ est alors également orthogonal puisqu'il admet pour image $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{H}^\perp$ et pour noyau $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Im}\, p = \mathrm{H}$.

I.2.a D'après le cours, le projecteur orthogonal p de F sur $\mathrm{H} = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$ est caractérisé par

$$\boxed{\forall\, z \in \mathrm{F} \qquad p(z) = \sum_{i=1}^{k} (e_i|z)\, e_i}$$

I.2.b.i Grâce à la question I.1, on sait que

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, k\} \qquad (e_i|z) = {}^t\mathrm{E}_i\,\mathrm{Z}$$

La matrice $\mathrm{M}(p)\mathrm{Z}$ du projeté $p(z)$ d'un vecteur $z \in \mathrm{F}$ est ainsi (cf. question I.2.a)

$$\mathrm{M}(p)\,\mathrm{Z} = \sum_{i=1}^{k} ({}^t\mathrm{E}_i\,\mathrm{Z})\,\mathrm{E}_i = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}_i\,({}^t\mathrm{E}_i\,\mathrm{Z})$$

puisque $({}^t\mathrm{E}_i\,\mathrm{Z})$ est un scalaire. Le produit matriciel étant associatif, il vient

$$\boxed{\forall\, \mathrm{Z} \in \mathrm{F} \qquad \mathrm{M}(p)\mathrm{Z} = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}_i\,{}^t\mathrm{E}_i\ \mathrm{Z}}$$

I.2.b.ii L'égalité encadrée ci-dessus signifie que l'endomorphisme associé à la matrice $\sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{E}_i\,{}^t\mathrm{E}_i$ dans la base $\mathcal{C}$ coïncide avec p sur F. Ils sont ainsi égaux : on en déduit que la matrice de p dans la base $\mathcal{C}$ est

$$\boxed{\mathrm{M}(p) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}_i\,{}^t\mathrm{E}_i}$$

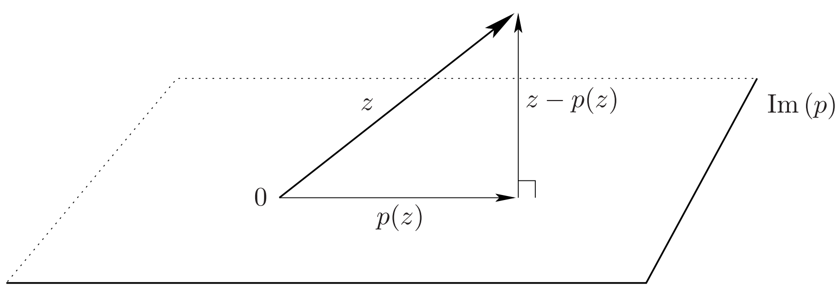
I.2.c Par définition d'un projecteur orthogonal, les vecteurs $p(z)$ et $z - p(z)$ sont orthogonaux pour tout $z \in \mathrm{F}$ si bien que

$$\|z\|^2 = \|p(z) + z - p(z)\|^2 = \|p(z)\|^2 + \|z - p(z)\|^2$$

d'après le théorème de Pythagore, soit

$$\|z\|^2 \geqslant \|p(z)\|^2$$

Par conséquent $\boxed{\forall\, z \in \mathrm{F} \qquad \|p(z)\| \leqslant \|z\|}$



On a même, plus généralement, la caractérisation suivante des projecteurs orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien :

> Un projecteur p d'un espace vectoriel euclidien F est un projecteur orthogonal si et seulement si $\|p(z)\| \leqslant \|z\|$ pour tout vecteur $z \in \mathrm{F}$.

L'implication directe vient d'être démontrée. Réciproquement, supposons qu'un projecteur de F satisfasse $\|p(z)\| \leqslant \|z\|$ pour tout $z \in \mathrm{F}$; pour montrer que c'est un projecteur orthogonal, il suffit de vérifier que $\mathrm{Ker}\, p \perp \mathrm{Im}\, p$. Soient donc $x \in \mathrm{Ker}\, p$ et $y \in \mathrm{Im}\, p$; pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $p(x+\lambda y) = \lambda y$ d'où

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \qquad \|\lambda y\| \leqslant \|x + \lambda y\|$$

soit $\qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \qquad \|x + \lambda y\|^2 - \|\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda(x|y) \geqslant 0$

La fonction affine qui apparaît dans la relation ci-dessus est de signe constant : elle est par conséquent constante et son coefficient $2(x|y)$ est nul. Ainsi, $(x|y) = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathrm{Ker}\, p \times \mathrm{Im}\, p$, ce qui prouve que $\mathrm{Ker}\, p$ est orthogonal à $\mathrm{Im}\, p$: le projecteur p est bien un projecteur orthogonal.

I.3.a Vérifions tout d'abord que $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}$: on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}^2 &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
\mathrm{M}^2 &= \mathrm{M}
\end{aligned}$$