X Physique et Sciences de l'ingénieur MP 2006
Corrigé

Ce corrigé est proposé par Olivier Frantz (Professeur agrégé) ; il a été relu par Julien Tailleur (ENS Cachan) et Jean-Julien Fleck (ENS Ulm).

Ce sujet propose d'étudier quelques aspects de l'expérience de la balance du watt, qui doit relier le kilogramme à la constante de Planck. Le but est de s'affranchir de tout étalon matériel, source de nombreux problèmes en métrologie.

- Dans la première partie, on touche à la complexité des problèmes de pesage de haute précision à travers l'étude de quelques sources d'erreur.
- Le principe de la balance du watt est abordé dans la deuxième partie. La comparaison entre une puissance mécanique et une puissance électrique permet de redéfinir la référence du kilogramme.
- La précision requise pour la mesure nécessite l'utilisation d'un système mécanique fiable. Les contraintes mécaniques de réalisation du dispositif expérimental sont l'objet de la troisième partie.
- La quatrième partie est l'occasion d'étudier les asservissements qui permettent d'atteindre une bonne précision de mesure. Un correcteur sera dimensionné moyennant quelques détours plus calculatoires que physiques.
- Enfin, la cinquième partie conclut le problème en reliant l'unité de masse à la constante de Planck en trois questions.

Les deux premières parties se traitent assez rapidement, en se consacrant à des problèmes de physique générale et d'induction magnétique. La troisième aborde de front la partie mécanique du cours de sciences de l'ingénieur, ce qui est une certaine innovation pour la troisième apparition de la nouvelle formule de l'épreuve. Cette partie nécessite d'avoir beaucoup de recul sur le cours de mécanique. L'étude de l'asservissement en position de la bobine ne pose pas de réel problème.

Indications

1.1.1 Pour trouver l'extremum de la surface du cylindre, l'exprimer en fonction d'une seule variable (R ou H) et du volume V, constant, et la dériver.

1.3.1 Relier l'énergie d'interaction à la force qui lui est associée.

1.3.2 Écrire l'égalité des pressions à l'interface liquide-vapeur.

1.3.3.b Pour calculer le nombre de molécules d'eau sur la surface du cylindre, il faut calculer le nombre d'hexagones nécessaires au pavage de $\mathrm{S}_{\mathrm{ext}}$. On sait ensuite que la masse volumique de l'eau vaut 10^3 kg.m^{-3} et on connaît le volume d'une molécule assimilée à une sphère.

1.5.1 Utiliser la loi de Biot et Savart.

1.5.4 Écrire la force totale comme la somme de deux forces, un peu à la manière de la physique des ondes.

2.1.1 Écrire la force de Laplace.

2.2.1 Intégrer le champ électromoteur sur le circuit $\mathcal{C}$.

2.3.2 Réécrire le champ électromoteur.

3.3 Quand des liaisons sont en série, pour trouver la liaison équivalente, on ajoute les torseurs cinématiques. Exprimer alors la vitesse du point D par rapport au repère $(\overrightarrow{\mathrm{X}_0}, \overrightarrow{\mathrm{Y}_0})$ et la vitesse de rotation de la pièce 3 par rapport au bâti 0 pour trouver les degrés de liberté du mouvement relatif de ces deux pièces.

3.4 Rappelons la formule $h = m + \mathrm{N}_{\mathrm{S}} - 6p$ où h est le degré d'hyperstatisme, m la mobilité du système, N_{S} le nombre d'inconnues de liaison et p le nombre de pièces (bâti exclu).

3.6 Quand des liaisons sont en parallèle, pour trouver la liaison équivalente, on ajoute les torseurs statiques. Exprimer alors la forme des torseurs statiques liés à chaque bras et les ajouter, en ayant pris soin de les exprimer dans un même repère.

3.10 Utiliser la figure 10 de l'énoncé et la reproduire en plaçant tous les axes en un même point d'application.

4.1 Faire le lien entre les équations, passées dans le domaine de Laplace, et le schéma-bloc.

4.4 Exprimer l'erreur et utiliser le théorème de la valeur finale.

4.8 Calculer les racines complexes s_k de l'équation $s^8 + 1 = 0$, ne garder que celles dont la partie réelle est négative et associer les $(s - s_k)$ intelligemment deux par deux pour calculer $\mathrm{B}_4(s)$.

La balance du watt

I. Étalons de masse ; quelques problèmes de leur comparaison

1.1.1 Le volume du cylindre vaut

$$\boxed{\mathrm{V} = \pi \mathrm{R}^2 \mathrm{H}}$$

La surface du cylindre est la somme de la surface des bases et de celle du fût :

$$\boxed{\mathrm{S_{ext}} = 2\pi \mathrm{R}^2 + 2\pi \mathrm{RH}}$$

Si on fixe le volume, H et R sont liées. On peut alors exprimer la surface du cylindre en fonction de la seule variable R et du volume V constant,

$$\mathrm{S_{ext}} = 2\pi \mathrm{R}^2 + \frac{2\mathrm{V}}{\mathrm{R}}$$

dont l'extremum est atteint pour

$$\left.\frac{\partial \mathrm{S_{ext}}}{\partial \mathrm{R}}\right|_{\mathrm{V}} = 4\pi \mathrm{R} - \frac{2\mathrm{V}}{\mathrm{R}^2} = 0$$

Cet extremum est un minimum car

$$\left.\frac{\partial^2 \mathrm{S_{ext}}}{\partial \mathrm{R}^2}\right|_{\mathrm{V}} = 4\pi + \frac{4\mathrm{V}}{\mathrm{R}^3} > 0$$

Ainsi, pour obtenir une surface minimale à volume fixé, on doit avoir

$$\boxed{\mathrm{R} = \sqrt[3]{\frac{\mathrm{V}}{2\pi}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H} = \sqrt[3]{\frac{4\mathrm{V}}{\pi}}}$$

> Pour minimiser la surface d'un cylindre, le rapport hauteur sur rayon doit être égal à deux.

1.1.2 De $\mathrm{V} = \dfrac{\mathrm{M}}{\rho}$ et des résultats ci-dessus, on tire les rayons et hauteurs

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{R_{Pt}} = 19{,}5\ \mathrm{mm} \\ \mathrm{H_{Pt}} = 39{,}0\ \mathrm{mm} \end{cases}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\begin{cases} \mathrm{R_{Inox}} = 27{,}3\ \mathrm{mm} \\ \mathrm{H_{Inox}} = 54{,}5\ \mathrm{mm} \end{cases}}$$

et les volumes et surfaces correspondants

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{V_{Pt}} = 4{,}65.10^{-5}\ \mathrm{m}^3 \\ \mathrm{S_{ext\,Pt}} = 7{,}16.10^{-3}\ \mathrm{m}^2 \end{cases}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\begin{cases} \mathrm{V_{Inox}} = 12{,}7.10^{-5}\ \mathrm{m}^3 \\ \mathrm{S_{ext\,Inox}} = 14{,}0.10^{-3}\ \mathrm{m}^2 \end{cases}}$$

1.1.3 La sphère est la forme de surface minimale à volume donné et permet donc de minimiser encore davantage, à masse identique, la surface extérieure.

Démontrons que pour un volume V donné, la surface de la sphère est moindre que celle du cube. Pour la sphère, on a $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ et $S_{\text{sphère}} = 4\pi R^2$, soit

$$S_{\text{sphère}} = 4\pi\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} V^{2/3}$$

Pour le cube, $V = C^3$ et $S_{\text{cube}} = 6C^2$, soit

$$S_{\text{cube}} = 6V^{2/3}$$

En conclusion $$S_{\text{sphère}}/S_{\text{cube}} = 0,8$$

La surface de la sphère est donc bien inférieure à la surface d'un cube de volume identique.

Pour minimiser les forces de tension superficielle à la surface d'un liquide, il faut que cette surface soit minimale. C'est pour cela qu'en microgravité les gouttes de liquide sont de forme sphérique ou que les bulles de savon adoptent naturellement cette forme.

1.2.1 L'étalon de volume V immergé dans l'air subit de la part de celui-ci une force ou poussée d'Archimède égale à

$$\boxed{\overrightarrow{P_A} = -\rho_{\text{air}} V \overrightarrow{g}}$$

La force $\overrightarrow{P}$ ressentie par la balance est alors égale à

$$\overrightarrow{P} = \rho V \overrightarrow{g} - \rho_{\text{air}} V \overrightarrow{g}$$

La masse M étant évaluée à partir de P/g, exprimons alors la variation apparente de masse δm du cylindre de volume $V = M/\rho$ qui en résulte

$$\boxed{\delta m = -\frac{\rho_{\text{air}}}{\rho} M}$$

1.2.2 Numériquement, les variations apparentes de masse valent

$$\boxed{\delta m_{\text{Pt}} = -6,0.10^{-2}\ \text{g} \qquad \text{et} \qquad \delta m_{\text{Inox}} = -0,17\ \text{g}}$$

L'erreur algébrique δm_{a} commise lors de l'étalonnage de la masse en Inox est ainsi égale à

$$\boxed{\delta m_{\text{a}} = \delta m_{\text{Pt}} - \delta m_{\text{Inox}} = -0,11\ \text{g}}$$

On a gardé autant de chiffres significatifs que la moins précise des données.

1.2.3 On obtient une erreur relative de masse de l'ordre de 10^{-4}, ce qui n'est pas suffisant par rapport à la précision souhaitée. La poussée d'Archimède étant en fait la résultante des forces de pression qui s'applique à la surface du cylindre, il paraît nécessaire, pour s'en affranchir, d'effectuer les pesages sous vide ou au moins sous une cloche isobare.