E3A Maths B MP 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Céline Chevalier (ENS Cachan) ; il a été relu par Romain Cosset (ENS Cachan) et Sophie Rainero (Professeur en CPGE).

Ce sujet, de taille et de difficulté moyennes, comporte trois exercices indépendants.

- Le premier a pour objectif de trouver un équivalent du reste d'une série alternée. Les questions initiales utilisent des théorèmes classiques et demandent de savoir manier correctement les inégalités. Il se conclut par une application du résultat au cas particulier de la série $\sum (-1)^k (\ln k)/k$.
- Le deuxième démontre que si les termes généraux de deux séries de fonctions sont équivalents, alors les fonctions sommes sont équivalentes elles aussi. Ce résultat est mis en œuvre sur deux exemples.
- Le troisième est centré sur l'algèbre linéaire et la réduction. Il étudie la matrice de Frobenius

$$\mathrm{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

  Son objectif est de calculer l'inverse d'une matrice s'exprimant comme un polynôme en F via des résultats classiques de diagonalisation.

Les trois exercices constituent de bons sujets de révision sur les thèmes abordés. Sans présenter de grande difficulté, ils permettent de s'assurer que les théorèmes du cours sont assimilés.

Indications

Exercice 1

1 Utiliser le critère des séries alternées et montrer que R_n est du signe de $(-1)^n$.

2 Exploiter l'indication de la question précédente ainsi que l'hypothèse *iv*).

3 La suite $(|\mathrm{R}_n|)$ est décroissante.

4 Utiliser l'hypothèse *ii*) ainsi que la question précédente.

5 Montrer que la suite (a_n) vérifie les quatre hypothèses du début de l'exercice.

Exercice 2

2 Revenir à la définition de l'équivalence.

3.2 Décomposer la somme du numérateur en deux parties.

3.3 Fixer un entier m bien choisi, et ne faire varier que t.

4.1 Déterminer un équivalent de $b_n = \dfrac{1}{n\,!}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

5.1 Raisonner par analyse-synthèse.

Exercice 3

1.1 Développer le déterminant par rapport à sa première colonne.

1.3 Considérer le polynôme minimal de F.

1.5 Raisonner en termes d'endomorphismes.

2.1 Les valeurs propres de $p(\mathrm{F})$ sont les $p(\lambda_i)$.

2.2 Le déterminant est le produit des valeurs propres.

3.1 Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

3.2 Appliquer la question 1.4 .

3.4 Utiliser les deux questions précédentes.

3.5 D'une part, exploiter la question 1.5 et l'expression de A^{-1}. D'autre part, la trace est la somme des valeurs propres, et celles de A^{-1} sont les inverses de celles de A.

Exercice 1

$\boxed{1}$ Les hypothèses *i*) et *iii*) assurent que la série de terme général $(-1)^n\, u_n$ vérifie le critère des séries alternées. Elle converge donc, ce qui justifie l'existence de la suite (R_n).

> Il ne faut pas oublier de justifier l'existence de la suite (R_n) pour valider les calculs bien que ce ne soit pas explicitement demandé par l'énoncé. Le critère des séries alternées suffit pour obtenir ce résultat, même si, comme le signale le rapport du jury, « dans trop de copies, les résultats élémentaires sur les séries alternées ne sont pas maîtrisés. »
>
> Rappelons le critère des séries alternées. Soit (u_n) une suite réelle décroissante et convergeant vers 0. Alors la série $\sum (-1)^n\, u_n$ converge.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{N} \geqslant n$. Posons

$$\mathrm{R}_{n,\mathrm{N}} = (-1)^n \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} (-1)^{k-n} u_k$$

Par définition, $$\mathrm{R}_n = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{R}_{n,\mathrm{N}}$$

En outre, si n et N ont la même parité,

$$\mathrm{R}_{n,\mathrm{N}} = (-1)^n \big((u_n - u_{n+1}) + (u_{n+2} - u_{n+3}) + \cdots + (u_{\mathrm{N}-2} - u_{\mathrm{N}-1}) + u_{\mathrm{N}}\big)$$

Dans le cas contraire,

$$\mathrm{R}_{n,\mathrm{N}} = (-1)^n \big((u_n - u_{n+1}) + (u_{n+2} - u_{n+3}) + \cdots + (u_{\mathrm{N}-1} - u_{\mathrm{N}})\big)$$

Dans les deux cas, la parenthèse est positive comme somme de termes positifs puisque (u_n) est décroissante et $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, R_n est du signe de $(-1)^n$ et

$$\begin{aligned}
|\mathrm{R}_n| + |\mathrm{R}_{n+1}| &= \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-n-1} u_k \\
&= u_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-n} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-n} u_k
\end{aligned}$$

d'où $$\boxed{|\mathrm{R}_n| + |\mathrm{R}_{n+1}| = u_n}$$

$\boxed{2}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Utilisons l'expression de $|\mathrm{R}_n|$ déterminée à la question précédente :

$$\begin{aligned}
|\mathrm{R}_n| - |\mathrm{R}_{n+1}| &= \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-n} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-n-1} u_k \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-n} u_k - \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-n} u_{k+1} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-n} (u_k - u_{k+1})
\end{aligned}$$

$$\boxed{|\mathrm{R}_n| - |\mathrm{R}_{n+1}| = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (u_{n+k} - u_{n+k+1})}$$

On obtient

$$|\mathrm{R}_n| - |\mathrm{R}_{n+1}| = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\underbrace{(u_{n+2k} - u_{n+2k+1}) - (u_{n+2k+1} - u_{n+2k+2})}_{\geqslant 0}\Big)$$

d'après la propriété *iv*).

> Si vous avez correctement justifié l'inégalité demandée à la question précédente en utilisant la suite $(\mathrm{R}_{n,\mathrm{N}})_\mathrm{N}$, le correcteur vous pardonnera à cette question de travailler directement sur la somme infinie.

Finalement, $\boxed{\text{La suite } (|\mathrm{R}_n|) \text{ est décroissante.}}$

3 Comme la suite $(|\mathrm{R}_n|)$ est décroissante, $|\mathrm{R}_n| \geqslant |\mathrm{R}_{n+1}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En outre, la question 1 assure que $|\mathrm{R}_{n+1}| = u_n - |\mathrm{R}_n|$. On en déduit que

$$|\mathrm{R}_n| \geqslant \frac{u_n}{2}$$

De même, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|\mathrm{R}_n| \leqslant |\mathrm{R}_{n-1}|$ et la question 1 appliquée au rang précédent donne l'égalité $|\mathrm{R}_{n-1}| = u_{n-1} - |\mathrm{R}_n|$, d'où

$$|\mathrm{R}_n| \leqslant \frac{u_{n-1}}{2}$$

Finalement, $$\boxed{\frac{u_n}{2} \leqslant |\mathrm{R}_n| \leqslant \frac{u_{n-1}}{2}}$$

4 D'après l'hypothèse *ii*), $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n-1}$. La question précédente montre alors que

$$|\mathrm{R}_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{2}$$

D'après le calcul de la question 1, $\mathrm{R}_n = (-1)^n\,|\mathrm{R}_n|$, donc

$$\boxed{\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n \frac{u_n}{2}}$$

5 Montrons que la suite (a_n) vérifie les quatre hypothèses du début de l'énoncé, en posant $u_n = \ln(n)/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La propriété *i*) est vérifiée par positivité de la fonction logarithme (pour $n \geqslant 1$ car u_0 n'est pas définie). Soit $n \geqslant 1$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\,\frac{n}{n+1}$$

dont la limite est 1 quand n tend vers $+\infty$: la propriété *ii*) est vraie. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n\ln(n+1) - (n+1)\ln(n)}{n(n+1)} = \frac{n\ln(1+1/n) - \ln(n)}{n(n+1)} \leqslant \frac{1-\ln(n)}{n(n+1)}$$

car $\ln(1+1/n) \leqslant 1/n$. Cette quantité est négative quand $n \geqslant 3$: $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante. Par croissances comparées, la suite (u_n) converge vers 0, ce qui montre que la propriété *iii*) est vraie (à partir du rang 3). Enfin, posons

$$f : \left\{\begin{array}{ccc}]\,1\,;+\infty\,[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{x} \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad g : \left\{\begin{array}{ccc}]\,1\,;+\infty\,[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x+1) - f(x) \end{array}\right.$$