E3A Maths A MP 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Dujardin (Chercheur à l'INRIA) ; il a été relu par Céline Chevalier (ENS Cachan) et Chloé Mullaert (ENS Cachan).

Dans ce problème, on fixe un nombre $c > 0$ et l'on considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants

$$y' + c\,y = f \qquad (\mathbf{1})$$

posée sur un intervalle I contenant 0. Plus précisément, pour différents types de conditions initiales y_0, on s'intéresse à l'application φ qui, au second membre f, supposé continu sur I et à valeurs réelles, associe la solution du problème de Cauchy correspondant à l'équation différentielle ($\mathbf{1}$) pour la donnée $y(0) = y_0$.

Ce problème est divisé en 6 parties ; dans les 5 premières, on impose $y(0) = 0$. L'intervalle I est un segment dans la partie 2, $\mathbb{R}_+$ dans la partie 3. La partie 4 considère le cas où f est développable en série entière sur $\mathrm{I} = \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$ pour un certain $\mathrm{R} > 0$. La partie 5 étudie l'application φ lorsque l'on impose des conditions de régularité supplémentaires aux fonctions f. Enfin, la partie 6 s'intéresse à l'unique solution 2π-périodique de ($\mathbf{1}$) lorsque f est de plus 2π-périodique. Dans chaque cas, on exploite la linéarité de φ et l'on montre sa continuité lorsque les espaces de départ et d'arrivée sont convenablement normés. On s'intéresse également à la bijectivité de φ et à la continuité de φ^{-1}.

D'une longueur raisonnable pour une épreuve de 4 heures, ce sujet passe en revue beaucoup de points du programme d'analyse de deuxième année, notamment les équations différentielles linéaires, l'intégration des fonctions continues sur un segment et sur un intervalle non borné, ainsi que la continuité des applications linéaires entre espaces vectoriels normés. Le rapport du jury sur cette épreuve précise explicitement que « le problème fait appel à de nombreuses connaissances du cours d'analyse. Il se veut progressif. Les premières parties sont très détaillées, ainsi que les premières questions des différentes parties suivantes. » Il constitue à coup sûr une excellente occasion de tester sa connaissance du cours.

Indications

I.1 Penser au théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires.

II.2 Se servir de la formule donnant $\varphi(f)$ démontrée en I.1.

II.5.b Utiliser le résultat de la question II.3 et raisonner comme en II.4.

III.1 Utiliser le résultat de la question I.1.

III.2 Justifier que f_λ et $\varphi(f_\lambda)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et utiliser le critère de domination en $+\infty$.

III.4 À l'aide du théorème de Fubini, établir que si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, il en est de même pour $\varphi(f)$ et

$$\|\varphi(f)\|_1 \leqslant \frac{1}{c}\,\|f\|_1$$

III.5 Multiplier la relation $g' + cg = f$ par g' et utiliser le fait que $\left(g^2\right)' = 2g'g$. Ensuite, établir que pour $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$, on a $\varphi(f) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$ et

$$\|\varphi(f)\|_2 \leqslant \frac{1}{c}\,\|f\|_2$$

IV.1 Utiliser le résultat de la question I.1.

IV.2 Se servir de la relation $\varphi(f)' + c\,\varphi(f) = f$ et des propriétés des fonctions développables en séries entières pour montrer par récurrence que

$$b_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1 \quad b_n = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1}\,\frac{(n-p)!}{n!}\,c^{p-1}\,a_{n-p}$$

V.1.a Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

V.2.a Utiliser le fait que

$$\exists\,\mathrm{B} > 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+) \qquad \|\varphi(f)\|_2 \leqslant \mathrm{B}\,\|f\|_2$$

V.2.c Penser au résultat de la question V.2.a.

V.2.d Se servir de la relation $\varphi^{-1}(y) = y' + c\,y$.

VI.1 Déterminer quelles sont les solutions 2π-périodiques de $y' + cy = f$ sur $\mathbb{R}$.

VI.2 Utiliser la relation $\varphi(g)' + c\,\varphi(f) = f$.

VI.3 Penser à la relation de Parseval. Utiliser le résultat de la question précédente pour montrer que

$$\|\varphi(f)\|_{\mathrm{F}} \leqslant \max\left(1, \frac{1}{c}\right)\|f\|_{\mathrm{E}}$$

Partie I

I.1 Rappelons le théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathrm{J}$. Soit a et b deux fonctions continues sur J à valeurs réelles et soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique fonction y dérivable sur J à valeurs réelles telle que $y(t_0) = y_0$ et pour tout $x \in \mathrm{J}$,

$$y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)$$

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I})$ et $c > 0$. Ce théorème appliqué sur I, avec $y_0 = 0$, la fonction a continue sur I égale à $-c$ et la fonction b continue sur I égale à f assure que

$$\boxed{\text{Pour tout } f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}) \text{ et } c > 0\text{, il existe une unique solution } y \text{ sur I à l'équation } y' + c\,y = f \text{ vérifiant } y(0) = 0.}$$

La positivité de c n'est pas utilisée dans cette question.

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I})$ et $c > 0$. Notons y la solution sur I de l'équation

$$y' + c\,y = f \qquad (\mathbf{1})$$

vérifiant $y(0) = 0$. Dans le but de se ramener à un calcul de primitive par la méthode de variation de la constante, définissons la fonction

$$z\colon \begin{cases} \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{e}^{\,cx} y(x) \end{cases}$$

Comme y est dérivable sur I, il en est de même de z. Soit $x \in \mathrm{I}$,

$$\begin{aligned} z'(x) &= c\,\mathrm{e}^{\,cx} y(x) + \mathrm{e}^{\,cx} y'(x) \\ &= c\,\mathrm{e}^{\,cx} y(x) + \mathrm{e}^{\,cx}\big(-c\,y(x) + f(x)\big) \\ z'(x) &= \mathrm{e}^{\,cx} f(x) \end{aligned}$$

car y est solution de l'équation $(\mathbf{1})$ sur I. Par intégration, il vient

$$z(x) = z(0) + \int_0^x z'(t)\,\mathrm{d}t = y(0) + \int_0^x \mathrm{e}^{\,ct} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque $y(0) = 0$, ceci s'écrit encore

$$z(x) = \mathrm{e}^{\,cx} y(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{\,ct} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Finalement, $$\boxed{\forall x \in \mathrm{I} \qquad \varphi(f)(x) = y(x) = \mathrm{e}^{-cx} \int_0^x \mathrm{e}^{\,ct} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

On retrouve ainsi l'unicité de la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + c\,y = f \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

sur l'intervalle I. Par ailleurs, pour démontrer l'existence d'une solution à ce problème de Cauchy, il suffit de montrer que la fonction $\varphi(f)$ définie par l'expression précédente est bien dérivable sur I et vérifie l'équation $(\mathbf{1})$ sur I.

On peut se passer du calcul explicite qui permet d'obtenir la formule encadrée ci-dessus en utilisant l'unicité de la solution du problème de Cauchy et en vérifiant simplement que la fonction proposée par l'énoncé est bien solution de ce problème de Cauchy.

Remarquons ici que la question est en deux temps et que chacun d'eux peut être une source d'erreur ou d'imprécision, ce qui n'est jamais vraiment souhaitable dans une première question. Voici l'avertissement du jury : « Les élèves ne reconnaissent pas explicitement le type linéaire de l'équation différentielle et en conséquence ne justifient pas toujours l'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire et n'en rappellent pas les hypothèses. Ceux qui résolvent l'équation oublient souvent de vérifier l'unicité avec la condition initiale. »

Enfin, le jury rappelle quelques conseils généraux à l'occasion de cette épreuve : « Nous conseillons aux futurs candidats de bien connaître les théorèmes-clés du programme ; quand un théorème est évoqué, il doit être énoncé et nécessite de vérifier toutes les hypothèses nécessaires à son application. »

I.2 Comme $y = \varphi(f)$ est solution de l'équation (**1**) sur I, il vient

$$\boxed{\varphi'(f) = -c\,\varphi(f) + f}$$

Puisque $\varphi(f)$ et f sont continues sur I, il vient par combinaison linéaire que $\varphi'(f)$ est continue sur I. Par conséquent,

$$\boxed{\varphi(f) \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur I.}}$$

Soit $(f_1, f_2) \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $y_1 = \varphi(f_1)$ et $y_2 = \varphi(f_2)$. Alors, sur I,

$$y_1' + c\,y_1 = f_1 \qquad \text{et} \qquad y_2' + c\,y_2 = f_2$$

En particulier, $$\lambda\,(y_2' + c\,y_2) = \lambda f_2$$

Ceci s'écrit encore $$(\lambda y_2)' + c\,(\lambda y_2) = \lambda f_2$$

Par suite, on a également, par addition

$$y_1' + (\lambda y_2)' + c\,y_1 + c\,(\lambda y_2) = f_1 + \lambda f_2$$

c'est-à-dire $$(y_1 + \lambda y_2)' + c\,(y_1 + \lambda y_2) = f_1 + \lambda f_2$$

Puisque $(y_1 + \lambda y_2)(0) = y_1(0) + \lambda y_2(0) = 0$, l'unicité de la solution du problème de Cauchy démontrée en I.1 assure que

$$\varphi(f_1 + \lambda f_2) = y_1 + \lambda y_2 = \varphi(f_1) + \lambda\varphi(f_2)$$

C'est-à-dire que $$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est linéaire sur } \mathscr{C}^0(\mathrm{I}).}$$

Puisque $\varphi(\mathscr{C}^0(\mathrm{I})) \subset \mathscr{C}^0(\mathrm{I})$ et φ est linéaire, φ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^0(\mathrm{I})$. Le reste du problème est consacré à l'étude de la continuité de φ restreinte à certains sous-espaces de $\mathscr{C}^0(\mathrm{I})$ munis d'une norme.