Centrale Maths 2 MP 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thomas Vidick (ENS Ulm) ; il a été relu par Arnaud Durand (ENS Cachan) et Tristan Poullaouec (ENS Cachan).

Le problème est consacré à l'étude d'une famille de polynômes réels $(\mathrm{L}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et à leur utilisation dans des contextes variés : algébrique dans la deuxième partie, analytique dans la troisième et géométrique dans la dernière.

- La première partie introduit le polynôme L_m comme primitive d'une fonction polynomiale. On prouve quelques propriétés simples de ce polynôme, qui servent de manière répétée dans les autres parties. On montre en particulier que L_m est solution d'une équation fonctionnelle et on étudie ses racines et leur ordre de multiplicité. On donne ensuite l'allure de la courbe représentative de L_m sur $[\,0\,;1\,]$ et on termine par la résolution de systèmes à deux, trois et quatre inconnues faisant intervenir la dérivée de L_m.

- La deuxième partie est consacrée à l'étude de projecteurs de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ définis à partir des polynômes de Taylor et des polynômes L_m. Dans chaque cas, on caractérise complètement le projecteur en donnant des bases de son image et de son noyau.

- Dans la troisième partie, on étudie une application des polynômes L_m au prolongement $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ d'un arc paramétré qui n'est a priori défini que sur $]\,{-\infty}\,;-1\,]\cup[\,1\,;{+\infty}\,[$. On s'intéresse ensuite à un exemple simple que l'on représente et dont on calcule le prolongement.

- La dernière partie commence par définir un système de coordonnées sur l'espace affine $\mathscr{E}_3$ de dimension 3, c'est-à-dire que, étant donné quatre points $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ et A_4 non coplanaires de $\mathscr{E}_3$, on construit des fonctions $(g_i)_{i=1,\dots,4}$ telles que
$$\forall \mathrm{M}\in\mathscr{E}_3 \qquad \mathrm{M}=\sum_{i=1}^{4} g_i(\mathrm{M})\,\mathrm{A}_i$$
Ce système de coordonnées sert à l'étude d'une fonction G définie sur $\mathscr{E}_3$ à l'aide de L_m et en particulier à la détermination de ses extrema sur le tétraèdre Δ de sommets $(\mathrm{A}_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$. Finalement, on se restreint à $m=1$ et on étudie la surface d'équation $\mathrm{G}(\mathrm{M})=1$ et ses intersections avec Δ et avec la boule de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

Le problème ne présente pas de difficulté majeure et peut être presque entièrement traité avec la seule connaissance du programme de première année, à l'exception des calculs de différentielles de la quatrième partie. Il est par contre relativement long, comme souvent à Centrale, et peut difficilement être résolu en totalité dans le temps imparti.

Ce sujet, consacré à l'étude de polynômes, fait essentiellement appel à des notions d'algèbre linéaire simple (surtout liée aux projecteurs) dans la deuxième partie puis de calcul différentiel dans la dernière partie, qui est surtout géométrique. Cette dernière présente quelques points délicats ; pour s'en sortir, il est important de bien se représenter la géométrie dans l'espace des objets manipulés.

Indications

I. Une fonction polynomiale

I.A.2 Effectuer le changement de variable $u = 1 - t$ dans la définition de $\mathrm{L}_m(1 - x)$.

I.B.1 Utiliser la positivité de la fonction $t \mapsto t^m\,(1-t)^m$ sur $[\,0\,;1\,]$.

I.C.1 Montrer que $\mathrm{L}'_m(x)$ admet une unique racine m-ième.

II. Les polynômes de Taylor

II.A Exprimer l'image d'un polynôme $\mathrm{P} = \Sigma\,\alpha_i\,(\mathrm{X} - a)^i$ par $\mathrm{T}_{n,a}$ en fonction de ses coefficients α_i.

II.B Utiliser le résultat de la question I.A.3 pour exprimer U uniquement en fonction de $\mathrm{L}_m(\mathrm{X})$ ou de $\mathrm{L}_m(1 - \mathrm{X})$. Utiliser alors le résultat de la question II.A.

II.C.1 Utiliser le résultat de la question II.B.

II.C.2 Montrer que $\mathrm{Im}\ \Phi = \mathrm{L}_m(\mathrm{X})\,\mathbb{R}_m[\mathrm{X}] + \mathrm{L}_m(1-\mathrm{X})\,\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$ en utilisant le résultat de la question II.B. Remarquer que $\mathrm{L}_m(\mathrm{X}) \wedge \mathrm{L}_m(1-\mathrm{X}) = 1$ et s'en servir pour prouver que $\mathrm{Ker}\ \Phi = \mathrm{X}^{m+1}\,(1-\mathrm{X})^{m+1}\,\mathbb{R}_{n-2\,m-2}[\mathrm{X}]$.

III. Un raccord

III.A.1 Utiliser le polynôme $\mathrm{L}_1(\mathrm{X})$.

III.A.2 Utiliser le polynôme $\mathrm{L}_2(\mathrm{X})$.

III.B Établir un résultat analogue à celui de la question II.B.

III.C.3 Résoudre l'équation $x_3(t) = 0$.

IV. Une animation

IV.A.2 Montrer qu'il y a une sous-famille libre de cardinal trois.

IV.B.2 Comme les A_i sont non coplanaires, M s'écrit comme barycentre de ces points. Utiliser alors le résultat de la question précédente pour calculer les $g_i(\mathrm{M})$.

IV.B.3 Utiliser le résultat de la question I.A.2.

IV.C.1 Montrer que Δ est l'image d'un compact par une application continue.

IV.C.2 Se ramener à une fonction de deux variables réelles en exprimant l'un des poids en fonction des deux autres. Utiliser alors la convexité de L''_m et le résultat de la question I.C.2.

IV.C.3 Utiliser le résultat de la question IV.B.1 pour montrer que la différentielle de g est nulle.

IV.C.4 Utiliser le résultat de la question I.C.3.

IV.D.3 Pour déterminer $\Sigma' \cap \Delta$, utiliser le résultat de la question IV.C.5.

IV.D.4 Représenter le plan $x = -y$ dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}, (\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath})/\sqrt{2}, \overrightarrow{k}\,)$.

I. Une fonction polynomiale

I.A.1 Commençons par calculer I_1 et I_2 en utilisant l'expression de I_m donnée par l'énoncé.

$$\mathrm{I}_1 = \frac{(1\,!)^2}{3\,!} = \frac{1}{6} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I}_2 = \frac{(2\,!)^2}{5\,!} = \frac{1}{30}$$

Ainsi,
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \begin{aligned} \mathrm{L}_1(x) &= \frac{1}{\mathrm{I}_1} \int_0^x t\,(1-t)\,\mathrm{d}t \\ &= 6 \int_0^x (-t^2+t)\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{L}_1(x) &= 6 \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_0^x \end{aligned}$$

d'où
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{L}_1(x) = -2\,x^3 + 3\,x^2}$$

De même,
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \begin{aligned} \mathrm{L}_2(x) &= \frac{1}{\mathrm{I}_2} \int_0^x t^2\,(1-t)^2\,\mathrm{d}t \\ &= 30 \int_0^x (t^4 - 2\,t^3 + t^2)\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{L}_2(x) &= 30 \left[\frac{t^5}{5} - 2\,\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} \right]_0^x \end{aligned}$$

soit
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{L}_2(x) = 6\,x^5 - 15\,x^4 + 10\,x^3}$$

> En utilisant la définition de L_m, on voit immédiatement que $\mathrm{L}_m(1) = 1$ (cette égalité servira à la question suivante), ce qui permet de vérifier rapidement les calculs effectués ci-dessus : on a bien $\mathrm{L}_1(1) = \mathrm{L}_2(1) = 1$.

I.A.2 Soit m un entier plus grand que 1. Effectuons le changement de variable $u = 1-t$ dans l'intégrale définissant $\mathrm{L}_m(1-x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \begin{aligned} \mathrm{L}_m(1-x) &= \frac{1}{\mathrm{I}_m} \int_0^{1-x} t^m\,(1-t)^m\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\mathrm{I}_m} \int_1^x (1-u)^m\,u^m\,\mathrm{d}u \\ \mathrm{L}_m(1-x) &= \frac{1}{\mathrm{I}_m} \int_x^1 (1-u)^m\,u^m\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la relation de Chasles,

$$\mathrm{L}_m(x) + \mathrm{L}_m(1-x) = \frac{1}{\mathrm{I}_m} \int_0^1 t^m\,(1-t)^m\,\mathrm{d}t$$

Comme $\mathrm{I}_m = \displaystyle\int_0^1 t^m\,(1-t)^m\,\mathrm{d}t$, on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{L}_m(x) + \mathrm{L}_m(1-x) = 1}$$

En appliquant cette égalité en $x = 1/2$, il vient

$$\boxed{\mathrm{L}_m\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}}$$

I.B.1 Commençons par étudier les zéros de L_m'. Comme primitive d'une fonction continue (ici, polynomiale), L_m est $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{L}_m'(x) = \frac{1}{\mathrm{I}_m}\,x^m\,(1-x)^m$$

$$\boxed{\text{Les racines de } \mathrm{L}_m' \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont donc 0 et 1, chacune ayant pour multiplicité } m.}$$

> Soit P un polynôme sur $\mathbb{R}$ et α un réel. On dit que α est racine de P de multiplicité k si
>
> $$\forall i \in \{0,\ldots,k-1\} \qquad \mathrm{P}^{(i)}(\alpha) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}^{(k)}(\alpha) \neq 0$$
>
> Ceci est équivalent à la caractérisation
>
> $$\exists \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{Q}(\alpha) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-\alpha)^k\,\mathrm{Q}(\mathrm{X})$$
>
> que nous avons utilisée dans cette question.

Cherchons les valeurs d'annulation de L_m sur $[\,0\,;1\,]$. Comme $t^m\,(1-t)^m > 0$ pour tout $t \in \,]\,0\,;1\,[$, alors, pour tout $x > 0$, $\mathrm{L}_m(x)$ est l'intégrale d'une fonction positive non identiquement nulle sur $[\,0\,;x\,]$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \mathrm{L}_m(x) > 0$$

Comme $\mathrm{L}_m(0) = 0$, le seul zéro de L_m est donc $x = 0$. De plus, la multiplicité de cette racine pour L_m est 1 plus sa multiplicité pour L_m'. Finalement,

$$\boxed{\text{L'unique racine de } \mathrm{L}_m \text{ dans } [\,0\,;1\,] \text{ est 0, de multiplicité } m+1.}$$

> Étant donnée l'expression de L_m', il est clair que $\mathrm{L}_m'(x) = \mathrm{L}_m'(1-x)$ pour tout x réel. Il existe donc une constante C telle que
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad \mathrm{L}_m(x) + \mathrm{L}_m(1-x) = \mathrm{C}$$
>
> Pour $x = 0$, on obtient $\mathrm{C} = 1$. Ceci nous donne une autre preuve du résultat de la question précédente. C'est en général la manière la plus simple de prouver qu'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ vérifie une équation fonctionnelle : on la dérive puis on utilise la valeur de la fonction en un point bien choisi pour calculer la constante d'intégration.