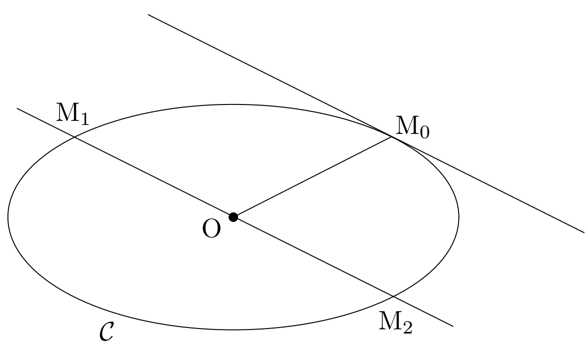
CCP Maths 2 MP 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Frédéric Mazoit (Enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Denis Ravaille (ENS Cachan) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Ce sujet de géométrie est de difficulté moyenne et peut être traité entièrement dans le temps imparti. Le thème central, les matrices de Gram, est très souvent abordé dans les sujets de géométrie ou d'algèbre, ce qui fait de cet énoncé un très bon entraînement aux écrits des concours. Il comprend quatre parties largement indépendantes et les résultats nécessaires à la suite du sujet sont fournis dans l'énoncé lorsqu'il y en a besoin.

- La première partie sert à établir des propriétés utilisées dans les parties suivantes. Elle donne notamment une interprétation géométrique des matrices de Gram.
- Dans la deuxième partie, on étudie à quelles conditions une sphère de dimension n admet des familles de p points tous à égale distance les uns des autres, puis on applique les résultats trouvés au cas de la dimension 3.
- La troisième partie porte sur les ellipses et plus précisément sur les théorèmes d'Apollonius :

  Étant donné une ellipse $\mathcal{C}$ de centre O et un point M_0 de $\mathcal{C}$, la parallèle à la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 passant par O coupe l'ellipse en deux points M_1 et M_2. On dit que $\overrightarrow{\mathrm{OM}_0}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}_1}$ (ou $\overrightarrow{\mathrm{OM}_0}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}_2}$) sont des diamètres conjugués.



  - $\mathrm{OM}_0{}^2 + \mathrm{OM}_1{}^2$ est constant quand M_0 décrit $\mathcal{C}$.
  - L'aire du parallélogramme qui s'appuie sur OM_0 et OM_1 est constante.

- Enfin, dans la quatrième partie, on montre, à l'aide des matrices de Gram, qu'une isométrie entre deux ensembles finis de points de $\mathbb{R}^n$ peut toujours se prolonger en une isométrie de $\mathbb{R}^n$.

Indications

Première partie

1.b Faire apparaître un produit de la forme ${}^t\mathrm{B}\,\mathrm{B}$. Utiliser le théorème du rang.

3.b Utiliser une propriété du déterminant des matrices symétriques.

4 Calculer $\Gamma\big(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}\big)$.

5.b Commencer par calculer $(x - z \mid y)$, $(x \mid z)$ et $(z \mid z)$ en utilisant la propriété du cours suivante : le projeté de x sur $\mathrm{Vect}(y)$ est $\dfrac{(x \mid y)}{(y \mid y)} y$.

5.c Distinguer le cas où $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont orthogonaux du cas général.

6.a Utiliser la question 2. Le volume du parallélépipède « formé par A, B, C et D » est $\det\big(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\big)$.

Deuxième partie

7.b Trouver une base de vecteurs propres.

7.c Faire apparaître une application du résultat de la question 7.b.

8.a Appliquer le résultat de la question 3.a.

8.b Appliquer le résultat de la question 3.b. Pour montrer que $m \leqslant n+1$, utiliser le premier critère de la question pour montrer que les familles $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$ ne peuvent pas être simultanément liées.

9 À l'aide des hypothèses sur la famille $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_m)$, déterminer m puis t. Interpréter géométriquement.

10.b Calculer les produits scalaires $(x_i \mid x_j)$ pour $(i, j) \in [\![\, 1\,;\, 3 \,]\!]$.

10.c Utiliser les résultats des questions 10.a et 10.b.

Troisième partie

11 Exprimer B en fonction de A et P. Calculer la trace des deux matrices.

12.a Faire intervenir la matrice $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{pmatrix}$.

12.c Une équation de la tangente à une courbe $\mathcal{C}$ au point M_0 est

$$\big((\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}_0} \mid \nabla\mathcal{C}(\mathrm{M}_0)\big) = 0$$

12.d.i Appliquer le résultat de la question 11 aux vecteurs définis à la question 12.b.

Quatrième partie

13.a Montrer la propriété pour les vecteurs de base.

13.b Pour montrer que $y_i - u(x_i) \in \mathrm{W}^\perp$, en utilisant le résultat de la question 13.a, calculer les produits scalaires $\big(y_i - u(x_i) \mid y_j\big)$.

14.b Une application affine $\varphi : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}$ est une isométrie si et seulement si

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = d\big(\varphi(\mathrm{A}), \varphi(\mathrm{B})\big)$$

I. Généralités

1.a Soit $\mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{n,1}$ telle que ${}^t\mathrm{Y}\,\mathrm{Y} = 0$. En notant $(y_{i,1})_{i\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]}$ les coefficients de Y et $(z_{1,i})_{i\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]}$ ceux de sa transposée, on obtient

$$ {}^t\mathrm{Y}\,\mathrm{Y} = \sum_{k=1}^{n} z_{1,k}y_{k,1} = \sum_{k=1}^{n} (y_{k,1})^2 $$

On en déduit que chaque terme $y_{k,1}$ est nul et donc

$$ \boxed{\text{La matrice Y est nulle.}} $$

> On peut aussi aborder la question en disant qu'une matrice Y de $\mathscr{M}_{n,1}$ peut être considérée comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et que ${}^t\mathrm{Y}\,\mathrm{Y}$ est alors le produit scalaire canonique de Y avec Y. Donc si ${}^t\mathrm{Y}\,\mathrm{Y}$ est nul, par définition du produit scalaire, $\mathrm{Y} = 0$.

1.b Soit X un vecteur de $\mathrm{Ker}\,({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A})$. Comme $({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A})\mathrm{X} = 0$, on a

$$ {}^t\mathrm{X}({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A})\mathrm{X} = {}^t(\mathrm{AX})(\mathrm{AX}) = 0 $$

Le résultat de la question 1.a permet alors de conclure que $\mathrm{AX} = 0$ et donc que X appartient à $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A})$. Finalement,

$$ \boxed{\mathrm{Ker}\,({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A})} $$

Comme par ailleurs, tout vecteur X de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A})$ vérifie $\mathrm{AX} = 0$ et donc

$$ ({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A})\mathrm{X} = {}^t\mathrm{A}(\mathrm{AX}) = {}^t\mathrm{A}\,0 = 0 $$

les noyaux de A et de ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ sont égaux.

D'après le théorème du rang, si $\varphi : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{F}$ est une application linéaire,

$$ \dim\big(\mathrm{Ker}\,(\varphi)\big) + \mathrm{rg}\,(\varphi) = \dim(\mathrm{E}) $$

Or, les applications linéaires associées aux matrices A et ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ ont toutes les deux le même ensemble de définition ($\mathbb{R}^n$) et nous venons de montrer qu'elles ont le même noyau. Par conséquent,

$$ \boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A})} $$

2 Pour $i \in [\![\,1\,;\,p\,]\!]$, les coordonnées du vecteur x_i dans la base $\mathscr{B}$ sont, par définition, les coefficients $(a_{k,i})_{k\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]}$. On en déduit que

$$ \begin{aligned} (x_i \mid x_j) &= \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}e_k \mid \sum_{l=1}^{n} a_{l,j}e_l\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} (a_{k,i}e_k \mid a_{l,j}e_l) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{k,i}a_{l,j}(e_k \mid e_l) \\ (x_i \mid x_j) &= \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} \end{aligned} $$

car $\mathscr{B}$ est orthonormale. Par ailleurs, $({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A})_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j}$ donc

$$\mathrm{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$$

De plus, d'après le résultat de la question 1.b, $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A})$. Par conséquent,

$$\boxed{\mathrm{rg}\,\big(\mathrm{G}(x_1, x_2, \ldots, x_p)\big) = \mathrm{rg}\,(x_1, x_2, \ldots, x_p)}$$

3.a Comme $n = p$, la matrice A définie à la question 2 est telle que

$$\begin{aligned} \mathrm{A} \text{ est inversible} &\iff \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = p = n \\ &\iff \text{la famille } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ est libre} \end{aligned}$$

D'après le résultat de la question 2,

$$\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,\big(\mathrm{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathrm{A} \text{ est inversible} &\iff \mathrm{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ est inversible} \\ &\iff \Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0 \end{aligned}$$

Et au final,

$$\boxed{\text{La famille } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ est liée si et seulement si } \Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.}$$

3.b On a démontré à la question 2 que $\mathrm{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \det({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}) \\ &= \det({}^t\mathrm{A})\det(\mathrm{A}) \\ &= \det(\mathrm{A})^2 \end{aligned}$$

Et donc $\qquad \Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$

Or on vient de montrer que la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée si et seulement si $\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. On en déduit donc que

$$\boxed{\text{La famille } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ est libre si et seulement si } \Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0.}$$

4 Les points A, B et C étant sur la sphère unité, on a

$$\|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\| = 1$$

Les produits scalaires $(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \mid \overrightarrow{\mathrm{OB}})$, $(\overrightarrow{\mathrm{OB}} \mid \overrightarrow{\mathrm{OC}})$ et $(\overrightarrow{\mathrm{OC}} \mid \overrightarrow{\mathrm{OA}})$ sont donc respectivement égaux aux cosinus des angles α, β et γ. Par conséquent,

$$\mathrm{G}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}) = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\gamma \\ \cos\alpha & 1 & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\beta & 1 \end{pmatrix}$$

En développant le déterminant $\Gamma(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}})$ selon la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}) &= \begin{vmatrix} 1 & \cos\beta \\ \cos\beta & 1 \end{vmatrix} - \cos\alpha \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\gamma \\ \cos\beta & 1 \end{vmatrix} + \cos\gamma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\gamma \\ 1 & \cos\beta \end{vmatrix} \\ &= 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma \end{aligned}$$