CCP Maths 1 MP 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pierre Bel (ENS Cachan) ; il a été relu par Guillaume Dujardin (ENS Cachan) et Jean Starynkévitch (Professeur en CPGE).

Le sujet se compose de deux exercices suivis d'un problème.

Les exercices portent sur la convergence de séries et sur le calcul de leurs sommes.

- Le premier recourt à des exemples simples qui ne nécessitent que des techniques élémentaires : la décomposition en éléments simples de fractions rationnelles, ainsi que l'identification avec une série entière classique.
- Le second est centré sur les séries de Fourier et les théorèmes de convergence classiques associés, pour le calcul de séries particulières.

Ces deux exercices étant proches du cours, ils nécessitent une connaissance précise des théorèmes.

Les fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact font l'objet du problème. Son objectif est de démontrer quelques résultats d'approximation et le théorème suivant :

> **Théorème (Whitney) :** Pour toute partie fermée F de $\mathbb{R}$, il existe une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que la partie F soit exactement l'ensemble des zéros de la fonction f.

Ce problème propose de revenir aux définitions de la continuité uniforme et de la limite, ce qui est l'occasion de se rafraîchir la mémoire sur ces éléments du cours de première année. On revoit aussi quelques propriétés : la compacité dans le cas de $\mathbb{R}$ et quelques résultats sur les intégrales (inégalités, dérivation). Il introduit en deuxième partie la convolution de deux fonctions, un outil très important de l'analyse.

Ce sujet, d'un esprit classique, est d'une difficulté raisonnable à l'exception de la dernière question du problème. La variété des techniques utilisées permet de faire un large tour d'horizon du programme d'analyse.

Indications

Exercice 1

a Pour le calcul de la somme, penser à la décomposition en éléments simples.

b Pour la somme, penser aux développements en séries entières usuelles.

Exercice 2

a Par parité, on ne calcule que les a_n, puis on utilise une intégration par parties pour les calculer.

b Utiliser le théorème de Dirichlet.

c Utiliser la formule de Parseval.

Problème

I.3.a Faire un raisonnement par récurrence.

I.4.b Utiliser la question précédente et des applications affines.

II.7 Regarder le comportement d'un polynôme à l'infini.

II.8.b Pour montrer que la convergence n'est pas uniforme, choisir un point d'évaluation pour z_n en dehors de son support.

II.10.b On peut utiliser les fonctions construites à la question II.8.

II.11.b Utiliser le résultat de la question précédente et les résultats sur les intégrales à paramètre.

II.12.a Utiliser la question I.6.a.

II.12.b Revenir à la définition de l'uniforme continuité.

II.12.c Démontrer qu'une fonction à support compact est uniformément continue.

III.14 Regarder le comportement de la fonction aux bornes de son support.

III.15 Faire attention à la finitude des bornes. Utiliser les fonctions construites aux questions I.3. et I.4.

III.16 Utiliser la question III.15.i et une série bien choisie.

Exercice 1

a

> Rappelons un théorème du cours sur les séries de termes généraux équivalents.
>
> **Proposition :** Si deux suites *positives* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes, alors la convergence de la série de terme général u_n est équivalente à la convergence de la série de terme général v_n.

Pour tout entier n strictement positif, le terme général $1/(n(n+1)(n+2)$ est positif, l'utilisation du résultat précédent est donc possible. On a

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$$

On reconnaît dans le second membre une série de Riemann de paramètre 3, la série est donc convergente (3 est bien strictement plus grand que 1).

$$\boxed{\text{La série de terme général } 1/\left[n(n+1)(n+2)\right] \text{ est convergente.}}$$

Afin de calculer explicitement les sommes partielles, déterminons la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :

$$\frac{1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)}$$

La fraction a trois pôles simples 0, -1 et -2. D'un résultat de cours sur les fractions rationnelles, il résulte l'existence de trois réels α_0, α_{-1} et α_{-2} tels que :

$$\frac{1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)} = \frac{\alpha_0}{\mathrm{X}} + \frac{\alpha_{-1}}{\mathrm{X}+1} + \frac{\alpha_{-2}}{\mathrm{X}+2} \qquad (\mathbf{1})$$

En multipliant $(\mathbf{1})$ par X, on obtient :

$$\frac{1}{(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)} = \alpha_0 + \frac{\mathrm{X}\,\alpha_{-1}}{\mathrm{X}+1} + \frac{\mathrm{X}\,\alpha_{-2}}{\mathrm{X}+2}$$

L'évaluation en $\mathrm{X} = 0$ donne $\alpha_0 = 1/2$. De manière similaire, en multipliant $(\mathbf{1})$ par $\mathrm{X}+1$, on a :

$$\frac{1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}+2)} = \frac{(\mathrm{X}+1)\,\alpha_0}{\mathrm{X}} + \alpha_{-1} + \frac{(\mathrm{X}+1)\,\alpha_{-2}}{\mathrm{X}+2}$$

ce qui, évalué en $\mathrm{X} = -1$, donne $\alpha_{-1} = -1$. Puis, en multipliant $(\mathbf{1})$ par $\mathrm{X}+2$, on a :

$$\frac{1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)} = \frac{(\mathrm{X}+2)\,\alpha_0}{\mathrm{X}} + \frac{(\mathrm{X}+2)\,\alpha_{-1}}{\mathrm{X}+1} + \alpha_{-2}$$

ce qui, évalué en $\mathrm{X} = -2$, donne $\alpha_{-2} = 1/2$. La conclusion du calcul donne alors

$$\frac{1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)} = \frac{1}{2\mathrm{X}} - \frac{1}{\mathrm{X}+1} + \frac{1}{2(\mathrm{X}+2)}$$

Cela permet d'obtenir pour tout m entier strictement positif :

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n+2}$$

En découpant le terme central en deux, cela implique

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n+1}\right] + \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n+2} - \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n+1}\right]$$

En décalant les indices, il vient

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{m+1}\frac{1}{n}\right] + \frac{1}{2}\left[\sum_{n=3}^{m+2}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{m+1}\frac{1}{n}\right]$$

Le calcul donne alors

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(m+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2(m+2)}$$

D'où $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(m+1)} + \frac{1}{2(m+2)}\right)$$

On en conclut que

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}}$$

b Le terme général de la série considérée est $u_n = 2^n/(n-1)!$. Cela permet de calculer pour tout entier n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n!}\left(\frac{2^n}{(n-1)!}\right)^{-1} = \frac{2}{n}$$

Il en résulte que $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0$$

$$\boxed{\text{D'après le critère de d'Alembert, la série converge.}}$$

On a de plus $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}$$

En décalant les indices, on a

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{2^n}{(n-1)!} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{2^{n+1}}{n!} = 2\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n}{n!}$$

On conclut finalement $$\boxed{\sum_{n\geqslant 1}\frac{2^n}{(n-1)!} = 2e^2}$$