

# Mines Physique et Chimie PCSI 2005

## Corrigé

Ce corrigé est proposé par Marc Jungers (ENS Cachan) et Alexandre Hérault (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Stéphane Ravier (Professeur en CPGE), Delphine Ruel (ENS Ulm), Jean-Julien Fleck (ENS Ulm) et Mickaël Profeta (Professeur agrégé).

---

La partie physique de ce sujet, subdivisée en quatre sous-parties indépendantes, porte sur les continuités et les discontinuités de certaines grandeurs.

- En mécanique, le pendule simple bloqué à mi-course par un clou est étudié.
- En électricité, l'énoncé propose d'étudier un circuit électrique du second ordre ainsi que la variation d'épaisseur d'un condensateur.
- La magnétostatique traite de la discontinuité du champ magnétique au niveau d'une nappe surfacique de courant.
- La quatrième et dernière sous-partie s'intéresse à deux discontinuités en thermodynamique : la détente de Joule Gay-Lussac et la mise en contact de deux solides de températures différentes.

Même si certaines questions sont délicates, elles restent très proches du cours et exigent une bonne maîtrise des démonstrations de celui-ci.

La partie chimie, quant à elle, est composée de trois problèmes indépendants. Les thèmes abordés sont variés et les questions font appel à un large spectre de connaissances au programme de première année. Certaines, plus qualitatives, demandent davantage de recul.

- Le premier problème est l'étude du dosage du glucose par la méthode de Bertrand, qui met en jeu l'oxydation par la liqueur de Fehling. On utilise ici les équilibres en solution aqueuse : réactions acido-basiques, de précipitation, de complexation et d'oxydoréduction.
- Le deuxième problème est une étude cinétique de l'oxydation d'un mélange de glucose et de fructose par les ions molybdate. On utilise les méthodes classiques de la cinétique formelle.
- Le troisième et dernier problème est, comme chaque année, consacré à la chimie organique : on étudie la synthèse de la (S)-fenfluramine. La synthèse magnésienne, très classique, est étudiée en détail. Substitutions nucléophiles et réactions des organomagnésiens sont au cœur de l'étude.

Comme dans la partie de physique, une large gamme du programme est abordée, ce qui fait de cette épreuve, extrêmement longue, un bon entraînement sur l'ensemble des thèmes du programme de première année.

## INDICATIONS

### Problème de physique

- 2 Projeter le principe fondamental de la dynamique appliqué au mobile sur  $\vec{u}\hat{\theta}$ .
- 10 Utiliser la conservation de la charge.
- 11 Le circuit proposé est un pont diviseur de tension.
- 13 Étudier le discriminant de l'équation caractéristique de l'équation différentielle.
- 15 Utiliser la définition de la capacité  $C = \varepsilon_0 S / e$  d'un condensateur plan d'épaisseur  $e$  et de surface d'armature  $S$ , quand on néglige les effets de bords.
- 16 Déterminer la direction du champ magnétique grâce à des considérations de symétrie et utiliser le théorème d'Ampère sur différents contours choisis pour obtenir la norme du champ magnétique.
- 18 Il s'agit du phénomène d'opalescence critique.
- 19 Appliquer le premier et le second principe de la thermodynamique au gaz.
- 20 Appliquer le premier et le second principe de la thermodynamique à l'ensemble des deux solides.

### Problème de Chimie

- 1 La présence de liaisons hydrogène intramoléculaires stabilise la base conjuguée.
- 3 Identifier les espèces qui apparaissent puis disparaissent pendant le dosage.
- 5 Comparer les pKa des deux acidités.
- 6 Utiliser le fait que certaines concentrations sont égales.
- 7 Quelle espèce est présente à l'équivalence ?
- 8 Penser aux conditions qui permettent d'assimiler les activités aux concentrations.
- 10 L'absorbance est sans dimension. Utiliser le système international puis les unités usuelles.
- 12 Utiliser les valeurs numériques pour calculer  $\varepsilon\ell$  et reporter la valeur dans l'expression de  $A_0$ .
- 14 Vérifier d'abord si le précipité existe, puis utiliser la relation de Guldberg et Waage pour les deux équilibres.
- 15 Invoquer une considération cinétique.
- 16 Équilibrer d'abord en milieu acide avec les couples impliqués, puis passer en milieu basique et en présence d'ions tartrate.
- 20 Le titrage est pertinent si toutes les transformations sont totales.
- 23 Quelle est la couleur des ions permanganate ?
- 24 Considérer les potentiels standard d'oxydoréduction du permanganate et de l'eau.
- 26 Le molybdène fait partie des exceptions à la règle de Klechkowski.
- 33 Établir les variations de  $\ln y$  si l'ordre est 1 et vérifier graphiquement.
- 38 L'inversion de l'atome d'azote est très rapide.
- 39 Le caractère R ou S est issu d'une convention arbitraire.
- 49 L'ion tosylate  $\text{TsO}^-$  est un très bon nucléofuge.

## PROBLÈME DE PHYSIQUE

### I. MÉCANIQUE

**1** Appliquons le principe fondamental de la dynamique au mobile ponctuel de masse constante  $m$  dans le référentiel galiléen considéré :

$$m \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \vec{f} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

La force  $\vec{f}$  étant constamment définie dans l'espace et le temps, elle est continue et finie. Cela interdit une discontinuité de la vitesse.

La norme de  $\vec{v}$  est une fonction continue du temps.

**2** Notons  $\vec{u}_z$  le vecteur unitaire vertical ascendant. Le mobile de masse  $m$  est soumis à deux forces :

- son poids, de valeur  $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$  ;
- la tension du fil  $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ , avec  $T > 0$ .

Ce problème ne comporte qu'un seul degré de liberté et le poids, qui est la seule force qui travaille, est conservatif. Utilisons le théorème de l'énergie mécanique appliqué au mobile (en prenant  $z$  l'altitude ascendante du mobile, nulle au niveau du point fixe O) : l'énergie mécanique

$$E_M = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 + mgz = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 + mg(-L \cos \theta)$$

est une constante. Dérivons-la par rapport au temps :

$$L^2\ddot{\theta} + mgL\dot{\theta} \sin \theta = 0$$

Comme la solution  $\dot{\theta} = 0$  n'est pas intéressante, on peut simplifier par  $L^2\dot{\theta}$ , ce qui donne l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

Une autre méthode consiste à appliquer le principe fondamental de la dynamique au mobile de masse  $m$  dans le référentiel galiléen considéré :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

La trajectoire est circulaire étant donné que le pendule reste tendu. La dérivée s'exprime alors de la façon suivante :

$$\vec{a} = L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

En projetant le principe fondamental sur la direction  $\vec{u}_\theta$ , on obtient l'équation différentielle

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

La projection sur la direction  $\vec{u}_r$  donnerait la valeur de la tension du fil en fonction de l'angle  $\theta(t)$ .

**3** Pour les petites oscillations  $\sin \theta \approx \theta$ , l'équation différentielle devient

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique non amorti, de pulsation propre  $\omega_0^2 = g/L$ . Sans le clou, la période des oscillations est donnée par  $T = 2\pi/\omega_0$ . La durée  $\delta t_I$  correspond au quart de cette période :

$$\delta t_I = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$\delta t_I$  est indépendant de  $\theta_0$ , en accord avec l'isochronisme des oscillations de l'oscillateur harmonique.

**4** On a vu que l'énergie mécanique est constante. À l'instant initial elle vaut

$$E_M = -mgL \cos \theta_0$$

car  $v_0 = 0$  et en  $t = t_1^-$ ,  $E_M = \frac{1}{2}m(v_1^-)^2 - mgL$

Finalement,

$$v_1^- = -\sqrt{2gL(1 - \cos \theta_0)}$$

en notant  $v_1^-$  la projection du vecteur vitesse sur le vecteur  $\vec{u}_\theta$ .

La vitesse linéaire est négative. En effet, pendant la première phase, le pendule chute (l'angle  $\theta$  est une fonction décroissante du temps).

La vitesse angulaire vaut

$$\omega_1^- = \frac{v_1^-}{L} = -\sqrt{2\frac{g}{L}(1 - \cos \theta_0)}$$

**5** Le blocage de la partie supérieure du fil par le clou ne s'accompagnant d'aucun transfert énergétique, l'énergie cinétique, la quantité de mouvement et donc la vitesse sont continues :

$$v_1^+ = v_1^- = -\sqrt{2gL(1 - \cos \theta_0)}$$

L'énergie cinétique est continue, mais cela n'implique pas que la vitesse le soit également ; en effet, un changement de signe brusque invaliderait cette proposition. On précise alors que la quantité de mouvement est elle aussi continue pour éviter ce problème, que l'on rencontre par exemple dans un choc élastique.

Le rayon de la trajectoire pour  $t > t_1$  est  $2L/3$ , d'où

$$w_1^+ = \frac{3v_1^+}{2L} = -3\sqrt{\frac{g}{2L}(1 - \cos \theta_0)}$$

$|\omega_1^+| = 3|\omega_1^-|/2 > |\omega_1^-|$  : le fil est plus court, ce qui implique que le pendule oscille plus vite.